

# 體積電子教材設計與教學試驗 ——小學五年級

黃幸美

本研究探討兩套體積電子教材對五年級兒童解決體積問題能力之影響。研究對象取自臺北市兩所公立小學各兩班五年級兒童 (N=108)，各校的兩班分別被隨機分派一班為動態幾何軟體應用之幾何融入體積課程組 (實驗組, n=55)；另一班為無動態幾何軟體融入體積課程組 (對照組, n=53)。研究結果顯示：實驗組於後測的整體表現優於對照組，此現象亦呈顯在體積意義說明題、體積比較題及綜合應用問題共三個分測驗的解題表現。實驗組與對照組受訪者皆有高人次指出從教材學到：體積的計算與公式、體積比較、體積單位與堆疊，且認為所習得的概念對解決體積問題有幫助；實驗組比對照組有較多人次指出學到立方體的性質與特徵、體積意義及圖形動態展示，此學習差異亦反映不同教材的特徵與差異。根據研究結果，本研究提出強化兒童解決體積問題能力的課程與教學建議。

關鍵詞：三維空間幾何概念、體積公式、體積測量

收件：2014年6月20日；修改：2015年2月16日；接受：2015年3月6日

## **An Experiment on Volume Measurement Electronic Instructional Materials and Instruction: Grade 5**

Hsin-Mei E. Huang

This study examined the effectiveness of two sets of electronic instruction materials used to teach children how to solve volume measurement problems. Two fifth-grade classes (N=108) were recruited respectively from two public elementary schools in Taipei, Taiwan. The two classes in each participating school were randomly assigned to two conditions: (a) the experimental-condition in which the dynamic geometry software-based approach with geometry-and-volume-measurement curriculum was given (n=55); (b) the control-condition in which the volume measurement curriculum without dynamic geometry software-based approach was provided (n=53). Findings show that the experimental-group outperformed the control-group in overall scores on the posttest and the scores on the three subscales, including explaining the meaning of volume, volume comparison, and reasoning-and-application. The interview data also demonstrated that the interviewees from the experimental-group more frequently acquired the characteristics of rectangular solids, the meaning of volume, and exhibitions of dynamic figures than those from the control-group. The distinctiveness between the two sets of curricula may show differences in learning outcomes between the two groups. The implications of the study and suggestions for enhancing children's ability to solve volume measurement problems are discussed.

Keywords: three-dimensional spatial geometry, formula for volume measurement, volume measurement

Received: June 20, 2014; Revised: February 16, 2015; Accepted: March 6, 2015

## 壹、緒論

體積為幾何量的一種 (Owens & Outhred, 2006)。學習具有幾何量性質的測量，待測物體所包含的空間概念、測量與數的運算技能三方面的學習，不可偏廢 (Gavin, Casa, Adelson, & Firmender, 2013; Owens & Outhred, 2006)，對於測量公式的概念理解尤然 (黃幸美, 2009)。體積測量概念為小學數學重要的課程 (國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域, 2010)。兒童自四年級即接觸立方體與 1 立方公分等體積相關的初步概念，但是教學者亦常發現高年級兒童對於體積測量與長方體公式概念缺乏理解 (謝明欣, 2011)。

體積測量與三維空間概念息息相關 (Fuys, Geddes, & Tischler, 1988)，理解具有幾何量性質的公式意義，尤需植基於測量與空間概念 (黃幸美, 2009)。檢視多年來數學教科書的體積教材，可發現：單元內容與體積問題偏重使用數字與體積公式解題，淡化討論長 (正) 方體的幾何特徵及其三維空間概念，而且教科書亦常將前述教材與體積測量分別設計為個別獨立的單元，兩者缺乏統整。上述有關教科書單元對體積量運算的偏重及缺乏連結空間幾何概念之現象，可能成為導致兒童的學習傾向記憶公式但缺乏概念理解的因素。

兒童的測量技能可以透過教學而改善 (黃幸美, 2009; Clements, 2003; Gavin et al., 2013)。由於體積概念、長 (正) 方體體積公式與三維空間的幾何概念，相互關聯 (Fuys et al., 1988)。幾何的面與體之空間概念教學，除了實體觀察與教具操作以外，先前研究 (例如：謝明欣, 2011; Van der Meij & de Jong, 2006) 指出：應用電腦軟體可以展示立方體的特徵及其三維空間、堆疊立方單位成立方體的歷程，且動態呈現幾何圖形表徵，可以幫助學生學習圖像與空間想像。兒童對於圖形表徵和空間想像的認知能力，與其學習體積與體積公式概念，兩者關係密切 (張碧芝、吳昭容，

2009；Ben-Haim, Lappan, & Houang, 1985)。因此，分析體積教材與概念性質、兒童的數學認知與測量思考，應用電腦軟體設計導向體積與體積公式概念理解的電子教材與教學試驗，為探討增進兒童解決體積問題能力的重要議題。

有視於提升兒童對體積概念理解與解題能力的重要性，本研究設計體積電子教材並探討試驗教學對兒童解決體積問題能力的影響。同時，使用個別晤談輔以瞭解兒童從試驗教材學到哪些概念及如何助益解決問題的認知。研究問題包含兩方面：

一、接受不同的體積電子教材的兒童，其解決體積問題的表現是否有差異？

二、接受不同的體積電子教材的兒童，其所習得的體積測量概念為何及認知所學概念對解決問題的助益為何？

## 貳、理論架構

### 一、體積及其測量公式概念的教與學

體積乃指物質所占空間的大小（國立教育研究院籌備處，2006）。小學數學的體積測量概念包含：立方體的三維空間概念、測量技能與體積量的計數，以及理解體積公式（例如：長（正）方體體積公式「長×寬×高」），上述概念亦為高年級兒童需發展的基本能力（參見能力指標 S-3-05 及 N-3-20，國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2010：29）。學習體積概念需植基於長度與面積概念，因此，體積教材亦多安排於長度與面積測量課程之後（國民小學課程標準，1993；國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2010）。本研究試驗教材焦點為五年級的體積課程，包含體積概念、體積測量及長（正）方體的體積公式導引，但不包含容量與液量測量。後文所指的體積公式，乃指長（正）方體的體積公式——「長（一邊）×寬（一邊）×高（一邊）」。

欲描述與測量三維物體所占的空間大小時，測量知識與數的運算為必要知能（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2006），而認知三維物體（例如：長（正）方體）的特徵及其三維空間概念，為確認待測物體的空間範圍、選用體積單位與計數測量結果等測量處理的基礎。因此，體積教材應兼具「數」、「量」、「形」的概念（譚寧君，1997），前述三種概念尤為理解體積公式及應用解題，不可或缺之要素。從《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》（2010）亦可見，體積測量與體積公式概念跨列於數量與幾何課程主題。

導引兒童認識體積測量性質時，數學教育學者（朱建正，2000；國家教育研究院籌備處，2006；Smith, Wiser, Anderson, & Krajcik, 2006）多建議：使用大小相同的立體單位（體積單位），複製或堆疊成一個立體物，然後計數立體單位於此三維結構（行、列與層）所組合的數量，所計數得的立體單位總量即為體積量。上述使用立體單位堆疊與計數的活動，實為長度測量、面積單位覆蓋與計數經驗的延伸，學生可應用先前測量長度與面積的經驗，使用加法計數長邊、寬邊、高邊所組合的立體單位數量或乘法推理，進而歸納「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」（或「底面積 $\times$ 高」）的規則（Van de Walle, 2004），此亦為體積測量的核心概念。

瞭解立體單位在立方體內部堆疊組成的行列矩陣與層的結構，為體積公式概念學習的核心（Battista, 2003）。此理解包含三項重要的認知處理：（一）瞭解長方體的長、寬、高邊皆被立體單位（1立方公分）等量分割——長邊為 $m$ 個1立方公分積木組成，其長度被分割成 $m$ 個1公分；寬邊由 $n$ 個1立方公分積木組成，其長度被分割成 $n$ 個1公分。（二）認知一個底面的結構——「一排有 $m$ 個1立方公分積木，有 $n$ 排」或「一列有 $n$ 個1立方公分積木，有 $m$ 列」，一面排有 $m \times n$ 個積木。（三）瞭解高邊由 $h$ 個1立方公分積木組成，其長度被分割成 $h$ 個1公分，當一層的高度為1公分時，高有 $h$ 層。因此，整個長方體即由 $m \times n \times h$ 個積木組合而成。上述亦為導引兒童瞭解體積公式的教學方法。

## 二、三維空間幾何概念與體積測量公式的關係及其教學

幾何的本質包含圖形（具體物件的圖形表徵）、形體的空間概念及邏輯推理（Clements, 2003）。由於形體的空間概念與邏輯推理相當抽象，學習者需藉由觀察、觸摸具體物與圖形及操作的歷程（例如：堆疊組合積木、繪圖），認知圖形表徵與形體的特性，使用歸納或演繹推理，以語言或文字符號說明定義或原理（Clements, 2003；Duval, 1995; Owens & Outhred, 2006）。Duval（1995）認為學習幾何概念時，上述歷程多為兩個或全部歷程交互運作。因此，欲發展兒童的空間概念與幾何推理思考，教學者必須多方提供幾何觀察、組合、堆疊操作與作圖活動機會，讓兒童從幾何活動中萃取圖形與立體物的物理特質，建構心象與心理性的操作及反思（Battista, 2003; Owens & Outhred, 2006）。學者們（張碧芝、吳昭容，2009；Cooper, 1990）也建議提供幾何操作與空間探索活動，以幫助兒童建構三維空間的心象。

在導引兒童學習具有幾何量性質的測量教學方面，先前研究（黃幸美，2009；Van den Heuvel-Panhuizen & Buys, 2008）指出：配合待測量物件的幾何性質（例如：線段或面積），提供適當的具體物做觀察、操作及教師導引式的討論教學，有助學習者從感官知覺物體所表徵空間的訊息，萃取其潛存的關係與原理（例如：透過圖形的切割與組合，觀察不同圖形之間的關係），裨益幾何與測量概念的學習，例如：瞭解如何使用長方形面積公式，透過圖形的切割與組合，推論其他圖形面積公式。

有關數理科學領域的公式教學之探討，Hartmann 與 Choppin（2003）及 Wu、Krajcik 與 Soloway（2001）指出：公式乃以抽象符號表徵某概念結構，教學者使用適當的電腦動態軟體，展示蘊含於公式符號的概念結構及其變項因子在模式中變動時產出的圖形，或二維與三維的表徵轉換，皆能幫助學生將所觀察的圖示表徵、空間認知與概念結構連結，促進理解概念結構及其公式意義。相似地，體積測量公式的認知，包含運

用乘法推理，歸納立方單位於長（正）方體內部空間組成的行、列、層結構，而瞭解上述原理需認識立體物三維空間、幾何量測量與推理規則。據此推論，應用適當的電腦動態幾何軟體，將三維空間融入體積測量，導引兒童觀察立體實物及其二維圖形表徵、操作立體單位的堆疊，討論立方體的性質、三維空間概念及其行、列、層結構，進而推導體積公式，預期將正向幫助兒童認知測量公式與提升解決體積問題能力。

### 三、電腦軟體應用於體積測量教材與教學的相關研究

晚近學者 Li 與 Ma（2010）以後設分析（meta-analysis）46 份探討電腦科技對 K-12 年級學生數學學習效果與影響之研究，發現：應用適當的電腦輔助軟體於數學課程與教學，助益提升數學概念理解與學習成就。在課室教學方面，PowerPoint<sup>®</sup>簡報軟體提供平面繪圖與展示功能，播放操作相當簡便，也普遍使用於課室教學（朱心蕾，2005；謝明欣，2011）。在體積測量概念的教學方面，除了提供學生觸摸與組合立體物的實際操作經驗以外，應用電腦資訊設備（例如：具表徵幾何形體物件特徵功能之軟體），讓學生深刻地獲取視覺上的空間感，可能為幫助學生建立立體物所占三維空間認知的有效途徑（謝明欣，2011）。PowerPoint<sup>®</sup>簡報軟體以二維平面呈現三維的立體圖，在提供視覺的空間感，實有其限制。Cabri 3D 的幾何軟體（Cabrilog Company, 2009）具有動態展示平面與立方體的移動、翻轉的功能，具有輔助測量公式教學之效果，例如：面積公式概念教學（Kordaki & Balomenou, 2006）。此外，Cabri 3D 軟體具有空間定位、呈現立方體物件的深度、透視圖與立體翻轉，以及動態展開立方體表徵成二維的展開圖等功能，上述功能適可提供學生觀察立方體的二維圖示與表徵三維空間的結構與關係，而且此軟體可與 PowerPoint<sup>®</sup>簡報軟體結合設計（謝明欣，2011），適於體積公式教學應用。

以下針對近年來應用電腦軟體於設計體積電子教材與教學的相關

研究，論述其對兒童體積概念學習的影響。王學武與陳偉文（2008）建構網站，結合 Flash 及 3D 軟體（Maya 與 Virtool）製作體積教材，探討其教材對六年級兒童（N=64）學習體積與澄清迷思概念的效果。研究結果發現：應用電腦軟體於體積教學，有助於澄清兒童對體積相關概念的誤解，接受實驗課程的兒童較容易建立正確的體積概念，其學習效果優於接受非電腦軟體應用實驗教學的控制組。此研究顯示——結合電腦軟體設計的體積教材正向輔助體積概念的學習，以及釐清體積與重量、材質、容積之間的迷思概念；惟此研究未探討——動態幾何表徵是否影響初步學習體積測量概念的學生理解體積公式。

後續，朱心蕾（2005）使用電腦 PowerPoint<sup>®</sup>設計體積教材並提供五年級兒童（N=66）教學試驗，研究結果發現：兒童是否接受電腦輔助的體積教材其解決體積問題的表現無顯著差異。賴蕙慈（2010）應用 Van Hiele 幾何思考層次理論，使用電腦 3D（PV3d）與動畫軟體（例如：Flash 與 Maya）設計體積與容積教材，並以六年級兒童（N=108）為研究對象進行教學試驗。研究結果發現：接受數位教材的實驗組（數位動態教學）與接受傳統教學的控制組（簡報靜態教學），在體積思考層次評量的表現皆有進步，但兩組解題表現無顯著差異。相繼地，謝明欣（2011）利用 Cabri 3D 軟體（Cabrilog Company, 2009）與 PowerPoint<sup>®</sup>搭配，設計體積測量課程並使用導引式問答討論教學，對四年級兒童（N=83）施行教學試驗，研究結果發現：接受資訊科技融入的體積課程的兒童，其解決體積問題的表現優於接受無資訊科技的體積課程（類似於一般教科書的體積單元教學）及接受非體積測量課程的兒童。

綜合上述的研究文獻，使用電腦軟體以動態展示幾何圖形表徵、立體單位堆疊組合成長（正）方體的歷程及所產出的長（正）方體，為設計體積電子教材的可行途徑，但是其教學效果則可能因試驗教材與評量問題差異，而產生不一致的結果。針對使用電腦 PowerPoint<sup>®</sup>結合 Flash



及 Cabri 3D 軟體設計體積電子教材與教學，對五年級兒童學習體積測量、公式意義與綜合應用解題的效果如何，仍有待進一步探討。

#### 四、導引式的討論教學之理念及其於測量教學的應用

導引式的討論教學法的核心理念，乃綜合黃幸美（2004，2009）與 Battista（2003）對測量教學的建議——教師提供具有啓發測量認知的學習情境，透過提問「什麼」、「為什麼」、「如何」等問題，導引學生探索與討論可行的解題方法、使用語言說明想法，助益學生的數學概念理解。此教學法強調教師於問題解決歷程中提問導引解題與概念理解的問題，繼而師生討論解題方法，也符合當前的數學課程與教學目標（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2010；NCTM, 2000）。

先前的研究（黃幸美，2009）發現：導引式的討論教學應用於面積測量教學，裨益提升兒童的面積概念理解與問題解決能力。因此，此教學方法亦使用於本研究的體積測量試驗教學——在教師提供認知導引情境下（電子教材與立體單位的堆疊操作），提問問題，鼓勵學生透過觀察與操作歷程，探索如何解題、討論與反思解題想法的正確性。

根據前述之理論架構，本研究提出研究假設：接受不同體積電子教材的兒童，其解決體積問題的表現有差異。

### 參、研究方法

本研究採準實驗法，將兩套體積測量的試驗教材，隨機分派到四個班級施行教學。在教學時間與教學方法皆相同的情況下，比較兩組兒童解決體積問題表現之差異。此外，為瞭解兒童從試驗教材所學到的概念內容，從兩組各隨機抽取部分兒童參加個別晤談。

## 一、研究對象

本研究對象取自臺北市兩所公立小學五年級四個班級（每校各兩個班級）共 108 位兒童（ $N=108$ ，男生 54 人；女生 54 人），平均年齡為 10.65 歲（ $M=127.81$  月， $SD=3.25$ ）。此兩所小學所在的學區皆屬於文教區，學生家庭多為中等社會經濟階層，班級皆為常態編班。於參與研究之前，所有受試者已學過正方體與長方體及 1 立方公分的意義，但是尚未接受過體積測量及體積公式之正式教學。

在組別分派方面，兩校參與研究的兩個班級皆分別被隨機分派 1 班為實驗組、1 班為對照組，人數分別為：實驗組 55 人；對照組 53 人。

在晤談兒童的選取方面，乃從實驗組與對照組班級，依各班兒童的上學期數學學業總成績，分成低、中、高分組，各組群分別隨機抽取 5 名兒童參加個別晤談。高分組為總成績分數排於全班前 27% 者，低分組為分數排於全班後 27% 者，中分組則介於前兩者之間。依上述抽取方法，實驗組與對照組參加晤談的兒童各為 30 名。

## 二、研究工具

### （一）試驗教材的設計、數學概念及教學方式

本研究設計兩套體積電子教材：1.動態幾何軟體應用之幾何融入體積教材（以下簡稱「實驗組」）；2.無動態幾何軟體應用之體積教材（以下簡稱「對照組」），此教材皆以靜態簡報軟體設計，包含體積測量與計算，但不強調立方體的三維空間幾何概念。兩份試驗教材及前、後測評量工具，乃依理論架構、數學課程標準與綱要（國民小學課程標準，1993；國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2010；NCTM, 2006）所闡述適於五年級的體積課程與教學建議，並修改自謝明欣（2011）的研究工具，使其更切合五年級兒童的體積概念學習。教學試驗時，兩套試驗

教材皆使用電腦 PowerPoint<sup>®</sup>簡報軟體與投影設備，提供每位兒童教學問題題本，配合教材展示長方體實物及積木，提供堆疊立方體與計數體積。兩組的試驗教學皆採導引式的問答討論教學，以五節課的時間完成，每節課約 40~45 分鐘。上述兩套試驗教材內容聚焦於體積測量概念與體積公式之導引，所包含的數學概念與教學方式分別說明如下。

### 1. 體積的數學概念結構

為連結兒童對於長方體、1 立方公分、長度與面積測量的先備知識，兩份試驗教材皆提供堆疊立方體與計數立體單位的活動，讓兒童學習使用體積單位測量與報讀測量結果，繼而從解題討論的過程，推導出體積公式。試驗教材包含以下七項數學概念：體積的意義與測量單位 (A)；體積的比較 (B)；長 (正) 方體的特徵與三維空間概念 (C)；辨識長方體三維與測量其長度 (D)；立體單位的點數與加法性 (E)；使用立體單位堆疊形成的行列矩陣與層的結構 (F)；體積公式、乘法運算紀錄與運用解題 (G)。試驗教材的概念類項、代碼、教學內涵及說明，彙整如表 1 所示。

依表 1 的概念類項與教學內涵說明，以下分別陳述兩份試驗教材的特質、所包含的數學概念與教學說明。

(1) 實驗組：此教材應用 Flash 與 Cabri 3D 軟體 (Cabrilog Company, 2009) 及 PowerPoint<sup>®</sup>簡報軟體與播放，展示長 (正) 方體的特徵、空間、堆疊歷程、一層 (高度為 1 公分的長方體) 等概念，將三維空間幾何概念融入體積測量。此教材包含 24 個教學問題題組，數學概念包含：A~G 共 7 個概念，教材例隅呈如圖 1 所示。教學強調操作立體單位的堆疊、以動態展示立體單位堆疊組成長 (正) 方體的歷程，並討論其所堆疊成一層的長、寬、高的意義、行列矩陣與層的結構，以及體積公式。

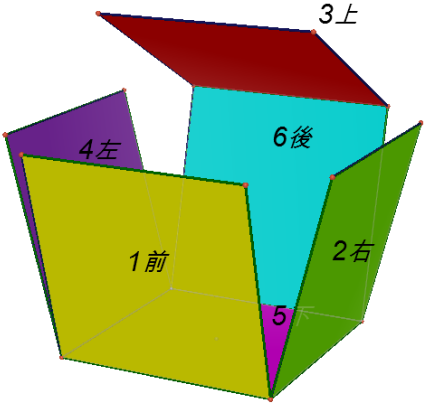
表 1 試驗教材的概念類項、代碼、教學內涵與教學說明

概念名稱	代碼	教學內涵	教學說明
體積的意義與測量單位	A	體積意義、個別單位與標準化單位(1立方公分的意義)。	強調使用感官、操作與觀察,認識體積的意義與立體物的特性、直接與間接比較物體的大小,以及使用體積單位與語彙描述測量結果。例如:觸摸長(正)方體的表面範圍或內部,指出其空間的量。
體積的比較	B	透過立方體實物與圖,進行體積的直觀比較、直接及間接比較。	
長(正)方體的特徵與三維空間概念	C	長(正)方體的結構、特徵與其二維立體圖。	強調立方體的三維空間幾何概念,並以此幾何認知為基礎,整合長度、面積與體積測量的關係。
辨識長方體三維與測量其長度	D	認識長(正)方體的長、寬、高邊及測量其長度。	強調連結長度概念、立方體的三維,以測量長(正)方體之三維長度。
立體單位的點數與加法性	E	使用立體單位堆疊複製一個全等的物件(或填滿空間),並計數立體單位數量。	強調使用立體單位重複堆疊(無空隙無重疊的原則),並導引觀察立體單位所組成的行列矩陣與層的三維結構,以及使用加(或乘)法計數立體單位之數量。
使用立體單位堆疊形成的行列矩陣與層的結構	F	立體單位組成立方體的行列與層的結構。	
體積公式、乘法運算紀錄與運用解題	G	體積公式的意義與應用運算。	從使用立體單位(1立方公分)堆疊出長(正)方體的「行」、「列」與「層」的結構,推導體積公式「長 $\times$ 寬 $\times$ 高」及應用於體積問題解決。

圖 1 的例隅甲和乙皆使用 Cabri 3D 軟體設計,並以動態展示一個立方體的六面展開過程,例隅甲的教學問題討論正方體的組成要素與特性,並以展開圖幫助學習者辨認相鄰與相對的面;例隅乙為動態展開一個正方體的表面,進一步討論其內部空間大小(正方體的體積);例隅丙則以動態展示立體單位堆疊與複製長方體的過程,並計算其立體單位數量。

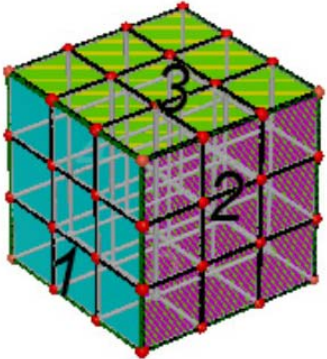
例隅甲

1.你知道這個正方體的哪幾個面是相鄰的嗎？  
2.你知道這個正方體的哪幾個面是相對的嗎？




例隅乙

你知道此正方體的體積是多少立方公分嗎？



例隅丙

用 1 立方公分的白色  堆堆看，堆成和這個體積一樣大的長方體，要用幾個白色積木呢？

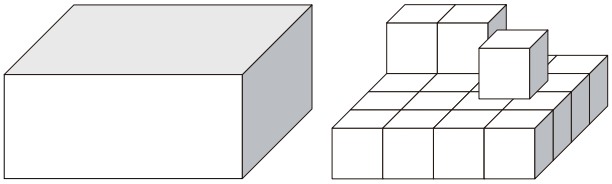


圖 1 實驗組的動態幾何軟體應用之幾何融入體積課程教學問題例隅

(2) 對照組：此教材類似一般教科書的體積單元，但是提供較多使用立體單位堆疊的操作活動與單位計數的機會，以及討論體積計算與應用體積公式解題。雖然體積本身即具有三維空間的性質，但此教材不包含長（正）方體的特徵討論，而且三維空間行列矩陣與層的結構皆以靜態圖呈現，有關行列矩陣與層的結構之討論也較少。教材包含 26 個教學問題題組，數學概念亦包含：A~G，此教材的例隅呈如圖 2 所示。教學強調立體單位的堆疊、計算及使用公式解題。

圖 2 的例隅丁、戊和己皆以靜態呈現三維的立體圖，於例隅丁的教學，師生討論如何計數所堆疊的單位數量、如何使用乘法紀錄算式；例隅戊和己則討論如何應用公式、使用乘法算式計算體積，以及算式紀錄的意義，藉問答討論讓學習者瞭解體積公式的意義。

### (二) 教學問題類型與解題所需的數學概念與技能

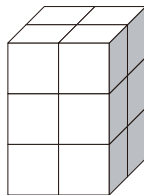
試驗教材的教學問題類型，包含體積的運算與概念理解問題，解決不同題型所需的數學知識與技能亦有差異。1.體積運算問題：包含填充題及使用算式記錄體積測量的運算題項。例如：圖 1 的例隅乙和丙、圖 2 的例隅丁和戊的體積計算，為運算問題，此類題型期以使用數學的程序性知識，培養體積計算能力。2.概念理解問題：包含數學想法判斷與理由說明問題。例如：圖 2 例隅戊的理由說明及例隅己，解題者需依其概念理解，說明數學想法，此類題型在於透過數學想法的說明、解釋、判斷與溝通，導引概念理解（黃幸美，2009）。

### (三) 前、後測與晤談問題

前測與後測為複本問題，其問題類型與教學問題類似，目的為評量兒童對於前文所述的七項體積測量概念的理解與應用解題表現，藉以檢驗試驗教材的教學效果。前、後測各包含 8 個問題組，施測時間各約為 40 分鐘。

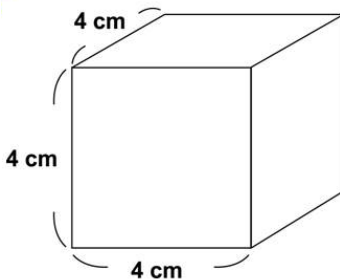
## 例隅丁

1. 一個小立方體是  $1 \text{ cm}^3$ 。
2. 你們知道這個立方體的體積是多少立方公分嗎？試用有乘號的算式記下來。



## 例隅戊

一塊正方體的洋菜凍，每邊長為 4 公分，它的體積是多少？請用乘法算式記錄你的想法。



## 例隅己

小華說：「這個洋菜凍的體積是  $4 \times 4 \times 4 = 64$  (立方公分)。」你知道算式中的數字各表示什麼意思嗎？

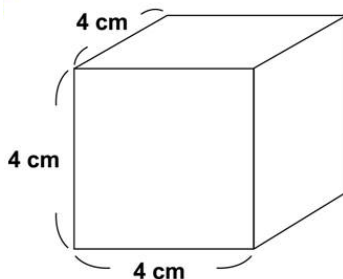


圖 2 對照組的無動態幾何軟體應用之體積課程教學問題例隅

前、後測的題組因其解題所需的技能不同，依解題所需的數學概念而區分，每份評量皆包含四種分測驗，各分測驗、問題類型、解題所需的觀念及其例隅，呈如表 2 所示。

1. 意義說明題：此分測驗包含 3 個題組（4 個概念理解的次題項），解題需以文字陳述說明體積與體積單位的意義。

2. 體積比較題：此分測驗包含 2 個題組（4 個概念理解的次題項），解題需計數與比較二維立體圖的體積大小。

3. 邊長測量與體積計算題：此分測驗類似於教科書或習作的體積問題形式，包含 2 個題組（6 個數字填充題及 2 個體積運算的次題項），解題需從二維立體圖辨認長方體的三維、測量其邊長及計算其體積。

4. 綜合應用題：此分測驗包含 1 個題組（2 個體積運算的次題項及 1 個概念理解的次題項），解題需從二維立體圖辨認長方體的三維，應用體積公式解題、判斷解題陳述的正確性與說明理由。


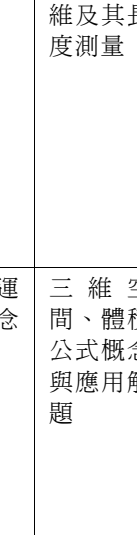


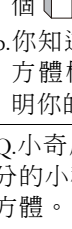




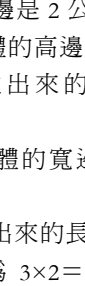
從表 2 可見前、後測的四種分測驗的問題類型與教學問題相似，所評量的概念與技能為試驗教材所包羅的類項。

在試驗教材與前、後測問題的效度與適合度分析上，乃經兩位任教高年級且具有研究所課程訓練的有經驗教師評閱，並認可其問題適合發展與評量兒童的體積測量概念。在評量工具的信度上，將前、後測問題對一所公立小學的一班五年級 25 位兒童施測，複本信度為  $r=0.79, p<.01$ 。

個別晤談的問題為：「請你告訴我，從老師上課討論這份作業問題，你學到了什麼？對於你解決體積問題，有沒有幫助？」晤談過程並全程錄音晤談內容。



表 2 前測與後測之分測驗、問題類型、解題所需之概念及其例隅

前、後測之分測驗	問題類型	解題所需之概念	題組例隅
意義說明	概念理解	體積的意義與單位	Q.你知道「體積」的意義是什麼嗎？請把你的想法寫下來。
體積比較	概念理解	三維空間、體積之大小比較	Q.甲、乙、丙、丁四個立方體，分別由  堆疊而成。小威說：「乙立方體比較高，所以乙的體積比甲、丙、丁大。」你同意他的說法嗎？為什麼？ 
邊長測量與體積計算	1.數字填充題 2.體積計算	三維空間、辨認長方體三維及其長度測量	Q.  為1立方公分的積木。右圖中的框架是一個長方體。小虎想用  積木把長方體的框架堆滿。  a.你知道長邊可用（ ）個  積木排成，寬邊可用（ ）個  積木排成，高邊可用（ ）個  積木排成。 b.你知道小虎需要用幾個  ，才能把這個長方體框架的空間堆滿嗎？請用算式紀錄說明你的想法。
綜合應用	體積運算、概念理解題	三維空間、體積公式概念與應用解題	Q.小奇用36個1立方公分的小積木，堆成一個長方體。  小奇說：「這個長方體的長邊是3公分，高邊是2公分。」 a.你知道這個長方體的高邊是用多少個1立方公分的小積木堆出來的嗎？你怎麼知道的？ b.你知道這個長方體的寬邊是多少公分嗎？你怎麼知道的？ c.莉莉說：「小奇堆出來的長方體，它的體積是6立方公分。因為 $3 \times 2 = 6$ （立方公分）。」你同意她的說法嗎？為什麼？

#### (四) 研究程序與施行

本研究程序包含前測、教學試驗、後測與晤談，約為三週完成。實驗組與對照組的試驗教學，乃由兩位試驗教師施行教學，每位教師負責實驗組及對照組教材各一班之教學。由於接受試驗教學班級的電腦設備與播放螢幕、黑板分別置於教室之前後兩端，若教學者單人教學兼操作教材簡報播放，則需頻於教室前後來回走動。為使教學者可專注於課程實施，本研究乃訓練 1 位播放助理，於各班教學時操作電腦軟體與播放教學問題。兩位試驗教學教師與教材播放助理，皆參與研究者主持之教學試驗演練，依試驗課程與教案施行教學。

為檢視教學試驗教師在實驗組與對照組的教學行為是否一致，於教學試驗實施時，由研究者與另一位受過教學觀察訓練的研究助理進行課室觀察，分別記錄實驗教師是否依實驗教材與對照教材的教案，完成所有教學問題的教學討論；教學時的板書與投影設備使用、行間巡視，以及提供兒童解題鼓勵的方式是否一致。

個別晤談於後測完成後施行，資料蒐集自受訪兒童的口語回答錄音，再轉成逐字稿。

### 三、資料分析

在前、後測的評分方面，乃參考黃幸美（2009）的評分方法，根據解題紀錄、解答是否正確及其完整程度，給予計分。（一）體積計算問題的評分：1. 填充題項：依數字答案的正確性，給予 0 分（不正確）或 1 分（正確）。2. 計算問題：根據其算式紀錄與計算結果之正確性評分，滿分為 5 分，不完整解答者為 4.5~2 分（例如：算式與計算皆正確但答案遺漏單位，給 4.5 分；答案與單位皆正確但無算式紀錄，給 3 分；算式正確但計算不正確，給 2 分）；空白未答或算式、解答皆錯誤者，給 0 分。（二）數學批判問題的評分：依批判答案的正確性，給予 0 分（不正確）或 2 分（正確）。（三）理由說明問題：根據其文字陳述的數學想

法之正確性與完整性評分，給予 2 分（解釋完整且正確）或 1 分（解釋正確但不完整）或 0 分（空白與不正確者）。

### （一）量化資料的處理

前、後測的整體總分，乃分別將四個分測驗之得分加總，整體總分各為 46 分。前、後測的四種分測驗總分分別說明如下：意義說明題總分為 8 分；體積比較題總分為 8 分；測量邊長與體積計算題總分為 16 分；綜合應用題總分為 14 分。於後續的資料分析上，包含 t-test 檢定及共變數變異數分析。

### （二）晤談資料處理

晤談資料的處理，乃依受訪者回答的內容做分類。在對試驗教材有否幫助解決體積問題的認知方面，依回答之「有」、「無」及「不知道」分類與計次。在學到的概念類項方面，依試驗教材所包含的概念類項做分類與多重計次。

在分類者內在信度方面，兩位分類員分類受訪者回答是否有助解題的認知，其一致性為 100%；在兒童習得的概念分類一致性方面，經使用 Kappa 分析兩位分類員的分類結果，分析結果為 0.91,  $p < .01$ 。

在檢視教學試驗教師的教學行為是否依各組教案，完成教學問題的教學討論與投影設備使用，以及提供鼓勵方式等行為，兩位觀察員記錄的多項教師行為符合與一致的程度達 85~90%以上，惟在提供教具與投影設備的項目上，受教學現場情況及電腦軟體操作突發狀況的影響，教師教學符合教案的程度約為 80%，例如：試驗教師於對照組的教學中，提供比教案多 1~2 次的堆疊討論與繪圖所堆疊的立體物；於實驗組教學中，因電腦軟體運作障礙，導致少數立體圖未能成功地動態展開圖形。

## 肆、研究結果

### 一、不同的體積教材對兒童解決體積問題表現的影響

各組在前、後測整體總分及各分測驗的得分平均數 (M)、標準差 (SD)，以及後測的調整後平均數 (Adj. M)，呈如表 3 所示。在比較兩組於後測的整體表現方面，使用前測總分為共變項，以後測總分為依變項，進行 ANCOVA 分析。由迴歸係數同質性考驗結果， $F(1, 104)=0.04$ ,  $p=.84$ ，顯示以共變項對依變項作迴歸分析時，其斜率無顯著差異，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設。後續的共變數分析，結果顯示：於去除前測的影響後，兩組於後測的整體表現呈現顯著差異， $F(1, 105)=9.43$ ,  $p<.01$ ，實驗組優於對照組，組別變項的效果量 (partial  $\eta^2$ ) 為.08。

為比較兩組於四種分測驗解題表現的差異，乃使用各分測驗的前測分數為共變項，以後測分數分別為依變項，進行 ANCOVA 分析，比較兩組的差異。

從表 3 可見，實驗組在後測的意義說明、體積比較及綜合應用分測驗的得分，皆高於對照組；但是在邊長測量與體積計算分測驗的分數，兩組則無顯著差異。在意義說明題之解題表現比較方面，迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設， $F(1, 104)=0.30$ ,  $p=.59$ 。共變數分析結果顯示：於去除前測的影響之後，兩組的解題表現呈顯著差異， $F(1, 105)=10.44$ ,  $p<.01$ ，實驗組的表現優於對照組，組別變項的效果量 (partial  $\eta^2$ ) 為.09。

在體積比較題之解題比較方面，迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設， $F(1, 104)=0.28$ ,  $p=.60$ 。共變數分析結果顯示：於去除前測的影響之後，兩組的解題表現呈顯著差異， $F(1, 105)=6.74$ ,  $p<.01$ ，實驗組的表現優於對照組，組別變項的效果量 (partial  $\eta^2$ ) 為.06。

表 3 兩組在前、後測整體及各分測驗得分之平均數、標準差與後測調整後平均數及分析結果

分測驗類別 與組別	人 數  n	解題表現					共變數分析 F 考驗
		前測		後測			
		M	SD	M	SD	Adj. M	
整體總分							F(1, 105)= 9.43**
實驗組	55	21.98	10.45	31.95	9.36	31.40	
對照組	53	20.27	9.46	26.47	10.09	27.02	
意義說明題							F(1, 105)= 10.44**
實驗組	55	1.67	1.77	2.41	1.72	2.30	
對照組	53	1.23	1.27	1.41	1.13	1.52	
體積比較題							F(1, 105)= 6.74**
實驗組	55	5.24	2.25	6.99	1.73	6.92	
對照組	53	4.82	2.27	5.93	2.23	6.00	
邊長測量與 體積計算題							F(1, 105)= 0.50
實驗組	55	9.98	5.02	13.26	3.83	13.03	
對照組	53	8.92	4.54	12.29	4.55	12.52	
綜合應用題							F(1, 105)= 8.59**
實驗組	55	5.09	4.24	8.84	4.52	8.90	
對照組	53	5.31	4.49	6.77	4.44	6.72	

\*\*  $p < .01$ 

在邊長測量與體積計算題之解題比較方面，迴歸係數同質性考驗符合共變數組內迴歸係數同質性的假設， $F(1, 104) = 0.12, p = .73$ 。共變數分析結果顯示：於去除前測的影響後，兩組的解題表現無顯著差異， $F(1, 105) = 0.50, p = .48$ 。此結果顯示，在解決類似教科書或習作體積問題形式的問題，實驗組與對照組解題表現相當。

在綜合應用題之解題比較方面，迴歸係數同質性考驗結果，符合共變數組內迴歸係數同質性的假設， $F(1, 104)=0.05$ ,  $p=.83$ 。共變數分析結果顯示：於去除前測的影響之後，兩組的解題表現呈顯著差異， $F(1, 105)=8.59$ ,  $p<.01$ ，實驗組的表現優於對照組，組別變項的效果量（partial  $\eta^2$ ）為.08。

## 二、晤談資料的分析結果

在受訪兒童認知試驗教材有否幫助解決體積問題方面，實驗組與對照組各有 29 人次（約 97%）回答「有」幫助；回答「無」幫助者，對照組有 1 人次（約 3%）；回答「不知道」者，實驗組有 1 人次（約 3%）。表 4 顯示受訪兒童陳述所學到的概念類項與其次數。

在從教材學到的概念（或技能）認知方面，表 4 顯示兩組受訪兒童陳述所學到的概念類項與次數，呈有相似與差異之處，但他們皆能明確指出所學到的概念。受訪兒童除了舉出教材所包含的概念類項（包含：體積意義、立方體的性質與特徵、體積單位與堆疊、體積的比較、體積的計算與公式），也指出有關動態展示立體圖的觀察，以及陳述非直接屬於教材概念的其他想法。前者歸類於「圖形動態的展示」；後者則歸類於「其他」。實驗組有 12 人次指出「圖形動態的展示」，對照組則無人次。在「其他」類項上包含：（一）「各式各樣的圖形」（實驗組 2 人次；對照組 1 人次）；（二）「自己思考如何解題」（實驗組 1 人次；對照組 2 人次）；（三）「如何畫立方體」（對照組 3 人次）；（四）「不一定較長的邊叫『長』」（對照組 1 人次）。

在「圖形動態展示」類項，部分兒童說明從長方體展開圖與合起來的動態圖，助於理解長方體的結構及如何計算體積。例如：一位實驗組的受訪兒童（E106）陳述：

如果老師只用講的話，我們不知道他是在表達什麼，也不知道它真正的那個形狀是什麼，如果用那個投影片的話，可以知道它真正是在講

表 4 實驗組與對照組受訪兒童陳述所學到的各類概念次數

晤談問題與說明類別	實驗組次數	對照組次數	總次數
是否有幫助解體積問題			
有	29	29	58
無	-	1	1
不知道	1	-	1
從教材學到的概念			
1.體積意義	12	5	17
2.立方體的性質與特徵	19	3	22
3.體積單位與堆疊	16	13	29
4.體積的比較	14	15	29
5.體積的計算與公式	26	30	56
6.圖形動態的展示	12	0	12
7.其他	3	7	10

什麼。……可以讓我更了解它展開後是什麼樣子，合起來又是什麼樣子，裡面到底是實心還是空心！

另一位實驗組的受訪兒童（E107）陳述：

它會讓我們，讓我們學到更多體積的問題呀，就是，就是它讓我們去數啊，然後去乘啊，然後去看它，它出現的過程那些的。……然後呢看螢幕，然後呢看那個，那個畫面啊，就是把它打開——就是把那個正方形打開然後看到裡面的結構，很好玩。

在「其他」方面，受訪兒童陳述自己思考解題的例隅如下所示。一位對照組的受訪兒童（C239）陳述：

課本的題目都有給……有些都有給答案，然後這個沒有給答案，要自己算，比較能了解。……以前我都搞不太懂為什麼要長乘以寬乘以高，

但是，現在老師告訴我，就是不管怎麼變，就不管怎麼直立、躺著，然後，那個算出來的都不會變啊，然後，所以我覺得這是一個新的發現。

一位實驗組的受訪兒童（E106）也陳述：

因為課本裡就有答案了，我們都看過答案，就看一看，哦！然後就這樣寫一寫而已，但是學習單沒有答案就會讓我們用腦袋去思考。

歸納晤談結果，顯示：兩組兒童所舉出習得的概念類項，雖具有相似與差異之處，但隱約反映個別教材所強調的概念。兩組皆有較高人次指出學到「體積的計算與公式」、「體積的比較」與「體積單位與堆疊」；其中，實驗組比對照組有較多人次指出學到「立方體的性質與特徵」與「體積意義」，表示此兩項與學習體積與立方體空間概念認知，息息相關。

## 伍、討論與建議

### 一、討論

本研究在教學時間與教學方法皆相同的情況下，探討不同的體積電子教材對五年級兒童解決體積問題表現的影響。研究結果發現：接受動態幾何軟體應用之幾何融入體積教材的實驗組兒童，其整體解題表現優於接受無動態幾何軟體應用之體積教材的對照組兒童。進一步分析兩組解題表現的差異，實驗組優於對照組乃展現在三個分測驗的解題表現上：意義說明題、體積比較題及綜合應用題；兩組在邊長測量與體積計算題的表現無顯著差異。上述研究結果支持研究假設——接受不同的體積測量電子教材的兒童，其解決體積問題的表現有差異。



同時，晤談結果顯示：實驗組與對照組受訪兒童指陳從試驗教學所學到的概念類項，反映其個別接受的教材特徵與所包含之概念要素。在比較兩組所習得的概念類項之人次差異方面，實驗組比對照組有較多人次指出學到「立方體的性質與特徵」、「體積意義」及「圖形動態的展示」，上述差異也呼應兩份教材所強調的概念之差別，而且此差異現象也為量化分析結果提供佐證。此外，兩組的大多數受訪兒童（實驗組 29/30；對照組 29/30）皆認為所提供的個別教材與教學，對解決體積問題具有幫助。雖然兩組所接受的教材不同，但受訪者多關注「體積的計算與公式」（實驗組 26/30；對照組 30/30），次而「體積的比較」（實驗組 14/30；對照組 15/30）與「體積單位與堆疊」（實驗組 16/30；對照組 13/30）。

統整本研究的量化與晤談分析結果，後文將討論不同教材對提升兒童解決體積問題能力的影響，並提出課程與教學建議。

#### （一）不同教材對兒童理解體積測量概念與解題表現的影響

在教學時間與教學方法皆相同的情況下，本研究發現應用動態幾何軟體將幾何概念融入體積測量的實驗課程，對提升兒童解決體積問題能力具有顯著助益效果，此結果與謝明欣（2011）的研究相似。同時，綜合量化分析與晤談結果，可得知三維空間幾何在兒童理解體積測量概念所扮演的角色——三維空間概念為測量立方體體積的概念成分，而且動態幾何軟體可應用以展示立方體圖的二維與三維空間表徵、立體單位堆疊成立方體的歷程及其行列矩陣與層的結構，裨益兒童了解體積測量概念（測量物體所占的空間大小），以及為什麼公式「長×寬×高」能使用於計算體積。呈如實驗組受訪兒童（E106 與 E107）的描述，教材中動態展示長（正）方體及其展開後的內部空間（例如：圖 1 的例隅甲、乙），以及使用立體單位組合成的矩陣與層的結構（例如：圖 1 的例隅丙），幫助他們瞭解實心與空心的長（正）方體。上述幾何圖形表徵，猶如提供兒童連結圖像認知與空間想像的橋樑，而且圖形表徵的認知與空間想像，即為促進瞭解體積測量及其公式的重要認知運作（張碧芝、

吳昭容，2009；Ben-Hain et al., 1985）。本研究結果呈顯三維空間幾何在學習體積測量所扮演的角色功能，也為 Owens 與 Outhred（2006）及 Gavin 等人（2013）的教學建議——體積教學需整合三維空間的幾何概念，提供闡釋說明。

比較本研究的實驗組與對照組教材，兩者最大的差異為：實驗組教材將長（正）方體的特徵與三維空間概念融入體積測量，一方面藉助立方體實物（或圖示）、積木堆疊活動，讓兒童從觀察、觸摸立方體實物與操作，認識立方體及建立立方體三維空間的知覺；另一方面，教材呈現幾何圖形的動態表徵——將立方體實物與堆疊操作轉化成動態圖示，導引兒童觀察與建構立體單位堆疊組成的行列矩陣與層的結構，以介紹體積公式。幾何圖形的動態表徵與展示，再次呈現堆疊與組成長（正）方體的結構，讓兒童從圖示表徵觀察三維物體所占空間及其與體積測量的關係，藉此認知長方體體積公式。同時，在導引式的討論教學模式下，兒童被鼓勵使用語言指出立方體特徵，說明測量立方體體積的方法與歷程。上述結合圖形表徵、立方體模型、操作與語言表達的學習情境下，裨益兒童將幾何形體的特質、空間概念與測量空間有多大的體積概念作結合，深化認知處理。誠如 Duval（1995）及 Clements（2003）的觀點，藉助觀察、操作實物模型，助益形成幾何圖像表徵與心像。由於幾何心像、歸納與推理的運作和兒童建構體積概念，息息相關（張碧芝、吳昭容，2009；Cooper, 1990），實驗組可從教材與教學導引投入上述的認知運作，強化其理解體積概念、應用於問題解決，其解題表現優於對照組。

相對地，對照組的體積教材強調立方體實物（或圖示）、積木堆疊活動，但不強調三維空間幾何概念。此教材類似於一般教科書的體積單元，傾向強調公式與使用數字計算體積，兒童可從堆疊立方體與體積測量的解題討論，習得體積測量技能與公式，以及處理較單純的體積運算問題，例如：辨認長（正）方體三維、測量邊長與體積計算，如研究結果顯示——兩組於上述分測驗的解題表現，無分軒輊。惟相較於實驗組

的教材，對照組教材缺乏三維空間幾何概念及行列矩陣與層的討論，此匱乏也可能導致學習者建構立方體三維空間的心像與推理有限，影響其解決體積問題能力的提升程度。同時，對照組解決需概念理解的問題（想法判斷與理由說明）表現不如實驗組（例如：意義說明、體積比較與綜合應用題），造成此結果的因素，除了上述的三維空間教材匱乏以外，另一可能因素為：對照組教材與教學強調公式與使用數字計算體積，在此教學情境下，兒童也傾向關注如何套用公式計算體積，忽略體積意義與隱含於體積運算的概念。

此外，本研究的實驗教材強調三維空間概念融入體積測量，在導引式的問答討論教學歷程中，結合立體單位的堆疊操作與測量空間的討論，其與記憶、套用公式運算的學習迥異。此教材對兒童解決體積問題的助益，尤彰顯在解決需要較高層次數學思考、判斷與想法說明能力的問題類型，此助益可從比較兩組兒童在不同類型問題的解題表現差異作說明。

1. 數學想法判斷與說明的問題解決：判斷數學解題想法與理由說明，需要理解問題潛存的概念。本研究的此類問題解決（例如：意義說明、體積比較與綜合應用題），解題者需理解體積測量概念，方能連結長度、面積與體積概念及運算技能，判斷解題陳述之正確性與說明理由。幾何量的測量與幾何概念關係密切（Owens & Outhred, 2006），實驗教材統整三維空間概念與體積測量，幾何概念猶如提供推理思考輔助，裨益實驗組對測量三維空間體積概念的理解。相對地，對照組的教材因缺乏三維空間幾何概念的輔助，導致該組在此類型的解題表現未能展現優勢。本研究結果——實驗教材（統合三維空間概念與體積測量）助益學童解決需概念理解的體積問題（判斷數學想法與說明理由），也呼應黃幸美（2009）於探討面積問題解決的課程實驗結果——結合二維空間概念與面積測量的課程，助益學童解決需概念理解的面積測量問題。

2.體積計算的問題解決：本研究前、後測的體積計算問題包含兩種分測驗：(1) 邊長測量與體積計算題：此類問題包含數字填充與計算，解決此類問題需要辨認二維立體圖的三維、計數邊長的格子數量，以及使用公式計算體積。(2) 綜合應用題：解決此類問題需運用三維空間概念與體積測量公式，根據已知訊息以推理與計算解題，以及判斷解題陳述的正確性與說明理由。上述分測驗皆提供附有格子的二維立體圖，解題者可從圖示辨認長方體的三維、計數格子與運用體積公式計算解題；但是相較於解決批判數學想法與理由說明問題，解決單純的計數運算問題其所需的數學思考複雜程度也較低 (Hiebert & Carpenter, 1992)。從研究結果顯示——兩組兒童在解決第一類問題的表現無差異，可見對照組教材對兒童學習與解決較單純的體積計算問題上的助益效果與實驗教材的效果相當；但是此教材對於需整合概念理解與運算技能的問題解決（第二類問題——綜合應用題），助益效果卻不足。相對地，實驗組在解決綜合應用題的表現優於對照組，由此可見，使用動態幾何軟體將三維空間幾何概念融入體積測量，對提升兒童綜合應用體積概念與公式解題的能力，具有助益效果。

最後，值得一提的是本試驗教材設計乃配合導引式問答討論解決問題的模式，除了電子化的教學材料以外，並提供兒童教學問題題本、問題相關的圖示（或教具）但無附解答，兒童需自行探索與思考如何解題，繼而與教學者、同儕討論解題，此種教學問題的類型與呈現方現，與教科書單元的教材（問題附圖與解答）不同。本研究接受教學試驗的兒童在探索與思考如何解題的情境下，教學者也針對問題提問「如何」、「為什麼」等問題，導引兒童討論並使用語言說明可行的解題方法，此種教學取向也是導向概念理解的途徑（黃幸美，2004）。呈如晤談資料的對照組兒童（C239）與實驗組兒童（E106）皆表示他們在問題沒有附解答的情況下，需自己動腦思考如何解題。學習者投入解題思考，輔以教學者導引討論，兒童在解題歷程也助益概念認知精緻化處理（黃幸美，2004）。

## （二）兒童從教材習得的概念與其對解題助益的認知

晤談資料顯示：兩組受訪兒童所指出的習得有助解決問題的概念類項，固然存有差異之處；但各組皆認為其所接受的教材對解決體積問題具有幫助。同時，受訪者所指出的概念類項也反映其所接受的教材特性與內容，例如：約有 40~63%的實驗組受訪者，指出學到體積意義、立方體的性質與特徵及圖形動態的展示等概念；約有 43~100%的對照組受訪者，指出學到體積單位與堆疊、體積比較及體積計算與公式，而且，對照組所指出的上述類項，實驗組也有 47~87%受訪者提出相同看法。此結果顯示：兒童能陳述從教材所學到的概念，也認知體積教材與教學對其解決體積問題的重要性。

在晤談結果的兩組相似之處，除了體積的計算與公式學習以外，兩組尚共同指出：體積單位的概念與堆疊、體積的比較。針對前述兩項概念之教學，本研究乃藉提供實物（或圖片）觀察與堆疊操作活動來施行。此研究結果所寓含的重要教學啓示為：兒童從比較體積、立體單位的堆疊與計數活動，產生深刻的學習印象，而且認為能從中學到概念，因此，上述活動於體積教學不宜忽略。

針對晤談結果的兩組差異方面，實驗組約近半數受訪者舉出從教材的介紹「立方體的性質與特徵」（19/30）、「體積意義」（12/30），以及「圖形動態的展示」（12/30），學到幫助解題的概念；相對地，對照組則少有人次列舉上述類項。此差異現象，可能由於兩組接受的教材不同，導致學習成果的差異。另一方面，實驗組比對照組多有受訪者指出：所習得的「立方體性質與特徵」、「體積意義」、「圖形動態的展示」，幫助他們解決體積問題。從本研究的量化分析結果——實驗組在解決意義說明、體積比較與綜合問題等分測驗上，表現優於對照組，其可能源自於實驗組兒童從教材習得上述概念，此學習進而助益其解決問題。由此結果亦可得知：三維空間幾何概念對兒童學習體積與公式概念的重要性。

此外，晤談結果也發現：兒童在學習體積測量教材時，相當關注於體積的計算與公式使用。兒童具有上述學習傾向，當課程與教學過度偏重公式記憶與套用公式計算解題時，也可能導致他們對體積概念產生迷思，例如：誤以為「長×寬×高」即是體積的意義。

統整本研究的晤談與量化分析結果，可發現在導引式的問答討論教學取向下，接受教學試驗的兩組兒童皆投入體積測量的學習，能陳述所習得的概念、察覺所習得的概念對解決體積問題的重要性，其學習成果也展現在解決評量的問題。本研究的教學試驗也呼應 Goldman 與 Scardamalia (2013) 針對資訊開放時代下培養學生管理、理解、應用與開創知識所呼籲的教學觀——提供具有認知與社會性支持的課程與教學，讓學生了解學習材料的事實基礎及其知識內涵，能檢視自己從教材所習得的概念並與他人溝通討論。值得重視的是，上述知識獲得的歷程是評鑑知識的重要性與開創知識等更高階能力發展的基礎。因此，本試驗教材與教學模式，值得教學實務工作者參考並推廣應用於課室的體積教學。

## 二、建議

三維空間的幾何概念對兒童學習體積測量與公式概念，具有輔助效果。長度與面積概念為建構體積概念的基礎，三維空間的幾何概念則為幫助兒童理解體積測量公式不可或缺的要素。同時，體積課程與教學在培養兒童解決體積問題能力上，扮演重要角色，而且將電腦的動態幾何軟體與體積測量結合設計的教材，可以有效地提升兒童解決體積計算、判斷與說明體積概念的能力。同時，提供立體單位的堆疊操作與觀察討論，對兒童學習體積概念也具有輔助效果，教學者亦需予以重視。

值得注意的是，接受不同試驗教材的兒童皆相當關注體積公式，但是兒童是否能充分瞭解體積公式所蘊含的三維空間內的行列矩陣與層的結構關係，則需進一步檢視。本研究的實驗教材包含動態幾何圖形展

示，兒童的注意力雖被動態圖示吸引，但晤談發現僅有部分的實驗組受訪兒童指陳從圖形動態的展示學到體積概念，未來的研究可進一步檢視實物操作、電腦動態幾何圖形表徵與展示模式，對兒童連結三維空間概念與體積測量技能，所產生的學習影響為何，以供課程設計與教學者安排多元學習媒材於體積教學、時間配置等設計之參考。

在電子教材的教學播放方面，雖有教學試驗研究以教學者單人執行教學與教材播放（例如：賴蕙慈，2010），但是教學者兼顧上述雙務的便利性，則可能受教室空間、電腦設備與螢幕位置是否便於操作而影響。由於本研究接受教學試驗班級的螢幕與電腦設置位置，分別位於教室之前、後方，為減省教師播放教學問題於教室來回走動的時間，因此，安排 1 位助理協助播放教學投影片及操作電腦軟體，以利教學順暢。惟此模式並未完全符合一般數學課室的教學人力現況，未來在推廣本試驗教材時，建議教師嘗試協同教學，使教學與電腦軟體操作、投影播放有效率地配合進行。

此外，本試驗教材的教學總時數乃參考一般教科書體積單元的教學時間之建議（5 節課），電子教材設計乃以教師（或成人）教學操作為主，未提供兒童操作的作業設計。根據王學武、黃榆婷、曾舒珮與王茵（2009）的研究，發現提供數學低成就學生使用數位遊戲式展開圖學習操作，可以提升他們的心理折疊與心智旋轉能力。上述能力與體積的三維空間概念具有關聯性，因此，未來研究建議於電子教材擴增學生操作作業——提供學習者操作二維與三維表徵轉換的作業，探討其對兒童理解不同型體的體積公式與解決體積問題能力的影響。

本研究為行政院科技部補助專案研究計畫「統合幾何與體積測量課程與教學之探討」（NSC100-2511-S-133-006-MY2）之部分研究成果，特此誌謝，但本文之言論不代表科技部。同時，作者感謝教師吳欣悅、鄭琪臻、謝明欣、吳雯婷之教學協助；研究助理林婉婷、張雯靜與陳奕杏在研究過程的協助和資料整理。作者也感謝參與研究學校之校長、參與班級之

教師與小朋友們，以及臺北市立師範學院音樂系 93 級同學簡菁瑩、王錦屏、賴曉庭、莊惠淳、沈玫伶在電腦播放圖片上的繪製協助。

## 參考文獻

- 王學武、陳偉文 (2008)。支援國小體積教學之 Web3D 教學網站開發之研究。《國民教育》，49 (1)，41-51。
- 王學武、黃榆婷、曾舒珮、王茵 (2009)。數位遊戲式正方體展開圖教材於提升國小學生空間能力成效之研究。《教學科技與媒體》，87，20-42。
- 朱心蕾 (2005)。資訊科技融入體積教學對國小學童學習影響之研究 (未出版之碩士論文)。臺北市立教育大學課程與教學研究所，臺北市。
- 朱建正 (2000)。小學量與實測教材課程解讀——從八十二年課程標準到九年一貫課程綱要。《翰林文教雜誌》，16，6-19。
- 國民小學課程標準 (1993)。
- 國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域 (2010)。
- 國立教育研究院籌備處 (2006)。國小數學教材分析——體積和角度。新北市：作者。
- 張碧芝、吳昭容 (2009)。影響六年級學生立方體計數表現的因素——空間定位與視覺化的角色。《教育心理學報》，41 (1)，125-146。
- 黃幸美 (2004)。兒童的數學問題解決與思考。臺北市：心理。
- 黃幸美 (2009)。整合二維空間幾何與面積概念的課程與教學試驗。《科學教育學刊》，17 (6)，509-530。
- 賴蕙慈 (2010)。應用 Van Hiele 幾何思考層次理論於國小學童體積概念數位教材開發之研究 (未出版之碩士論文)。國立臺北教育大學教育傳播與科技研究所，臺北市。
- 謝明欣 (2011)。資訊科技融入體積課程對國小學童學習體積概念之影響 (未出版之碩士論文)。臺北市立教育大學課程與教學研究所，臺北市。
- 譚寧君 (1997)。面積與體積的教材分析。載於臺灣省國民學校教師研習會 (主編)，國民小學數學科新課程概說 [中年級]——協助兒童認知發展的數學課程 (pp. 175-192)。臺北縣：臺灣省國民學校教師研習會。
- Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 122-142). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ben-Haim, D., Lappan, G., & Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and effecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 389-409.



- Cabrillo Company. (2009). *About Cabrillog history*. Retrieved from <http://www.Cabrillog.com>
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Cooper, L. A. (1990). Mental representation of three-dimensional objects in visual problem solving and recognition. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition*, 16 (6), 1097-1106.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processing. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Berlin, Germany: Springer.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The Van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, 3, 1-195.
- Gavin, M. K., Casa, T. M., Adelson, J. L., & Firmender, J. M. (2013). The impact of challenging geometry and measurement units on the achievement of grade 2 students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(3), 478-509.
- Goldman, S. R., & Scardamalia, M. (2013). Managing, understanding, applying, and creating knowledge in the information age: Next-generation challenges and opportunities. *Cognition and Instruction*, 31(2), 255-269.
- Hartmann, C., & Choppin, J. (2003). Measurement, representation, and computer models of motion. In D. H. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement. 2003 year book* (pp. 293-317). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York, NY: Macmillan.
- Kordaki, M., & Balomenou, A. (2006). Challenging students to view the concept of area in triangles in a broad context: Exploring the features of Cabri-II. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 11(1), 99-135.
- Li, Q., & Ma, X. (2010). A meta-analysis of the effects of computer technology on school students' mathematics learning. *Educational Psychology Review*, 22, 215-243.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: Author.
- Owens, K., & Outhred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present, and future* (pp. 83-115). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.
- Smith, C. L., Wiser, M., Anderson, C. W., & Krajcik, J. (2006). Implications of research on children's learning for standards and assessments: A proposed

- learning progression for matter and the atomic-molecular theory. *Measurement: Interdisciplinary Research and Perspectives*, 4 (1-2), 1-98.
- Van de Walle, J. A. (2004). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (5th ed.). New York, NY: Pearson Education.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Buys, K. (2008). *Young children learn measurement and geometry: A learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for the lower grades in primary school*. Rotterdam, the Netherlands: Sense.
- Van der Meij, J., & de Jong, T. (2006). Supporting students' learning with multiple representations in a dynamic simulation-based learning environment. *Learning and Instruction*, 16, 199-212.
- Wu, H.-K., Krajcik, J. S., & Soloway, E. (2001). Promoting understanding of chemical representations: Students' use of a visualization tool in the classroom. *Journal of Research in Science Teaching*, 38(7), 821-842.