

評論

由 PISA 2022 評量架構反思臺灣十二年國教數學領域課程綱要之學習表現

| 謝豐瑞、王婷瑩、吳嵐婷

壹、序言

國際經濟合作暨發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD）主辦的國際學生能力評量計畫（Programme for International Student Assessment, PISA）於 2022 年以數學為主題進行國際評比測驗，此評比獲得國際的認可，參與國數目逐年增長，至 PISA 2022 已超過 85 國參與。大量參與國研究團隊的參與及規劃使其評量精神與內涵代表著國際的趨勢，也刻畫出前瞻的數學素養評量願景。時值臺灣《十二年國民基本教育課程綱要》施行至今已達 5 年以上，透過代表前瞻視角的 PISA 2022 數學評量觀點反思臺灣《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域》（2018）（以下簡稱十二年國教數學領綱）的前瞻性，將可做為臺灣數學領域課程綱要發展的參考。

PISA 2022 在其評量架構中將數學素養（mathematical literacy）界定為：

謝豐瑞，國立臺灣師範大學數學系教授

王婷瑩，國立臺灣師範大學數學系副教授，E-mail: tywang@gapps.ntnu.edu.tw

吳嵐婷，國立臺灣師範大學數學系博士候選人

個體在各種真實世界情境脈絡中，進行數學推理及形成、應用、詮釋數學以解決問題的能力。這種素養包含運用數學概念、程序、事實與工具來描述、解釋和預測現象。數學素養促進個體瞭解數學在世界中所扮演的角色，並促使個體作出有根據的判斷與決策，此乃成為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民所需。（謝豐瑞等人，2025，頁 13）

此簡短的數學素養界定所延伸的議題卻頗為寬廣。PISA 認為 21 世紀公民所在的社會面臨兩大挑戰，一為各個領域皆開始或已經進入數位化，另一為諸多環境社會的變遷，如政府債務、人口增長、全球性傳染病、經濟全球化以及氣候變遷等（OECD, 2023a）。面對這兩大挑戰，數學素養的內涵與其在現代社會中的重要性已發生深刻變革，廣泛應用數據做決策已經是數學素養中不可或缺的技能，而進行或理解大量量化分析之技能更是思辨或因應環境社會變遷的關鍵能力。數據與量化分析的基本配備，無可避免的是科技工具，然而從我國根據十二年國教數學領綱的全國性數學考試（如國中教育會考、學科能力測驗）來看，即便是最基礎的計算機也無立身之地，更遑論其他先進適於大量數據分析的科技工具。由此可見，PISA 2022 評量所著重的觀點與臺灣十二年國教數學領綱所著重的觀點必有所差異。

本文旨在從代表前瞻性的 PISA 2022 評量觀點反思臺灣十二年國教數學領綱。在選取反思課綱的構面上，鑒於篇幅限制，本文欲聚焦於少數重要構面，不考慮拓展到與評量無關的課程面向（如：師資要求，見 Gouëdard et al., 2020），是以，反思構面將參考 Alkin（1973）與 Johnson（1973）針對分析國家課程與教育改革脈絡所提出的理論架構。這兩位學者的分析架構涵蓋 3 個重要構面，他們認為課程最重要的構面是預先設定的課程價值觀（value），此價值觀直接反映在或影響到教育目標（educational goals）或學習成果（learning outcomes）的設定；其次是達成教學目標或學習成果的教學相關構面，此部分包含兩大構面，

其一為教學操作中的互動形式（interactions which will form the total instructional operation）；另一則為教學材料的特徵（characteristics of the materials）。教學操作中的互動形式牽涉到師、生、教材之間的互動，然而 PISA 2022 評量不牽涉教師的部分，故僅以學生與數學的互動形式進行反思；而在教學材料的特徵之構面上，如數學題材深廣度或表徵形式等，都不如課程對數學題材選擇或著重面向的側重來得關鍵，而 PISA 2022 在數學題材的著重上有其專有論點，故以此面向進行反思可提供值得參考的資訊。是以，本文第二部分將從三個面向，透過 PISA 2022 反思臺灣十二年國教數學領綱：一、數學知識存在價值面向；二、學生與數學互動方式面向；三、數學題材著重面向。

貳、三面向由 PISA 2022 反思臺灣 十二年國教數學領綱

一、數學知識存在價值面向

（一）兩個對比面向的數學課程價值觀

數學作為一門知識，我們可以從 3 個角度來思考其存在的型式（Ernest, 1991）。

1. 本體論（ontology）的角度

這個角度關注的是數學其本體是什麼？其真實本質是什麼？什麼是可以被知道的？數學（其物元、根本）是以何種型態存在？是一種真實的存在（being and existence）嗎？

2. 知識論（epistemology）的角度

這個角度關注的是從數學的起源來看，人和數學的關係為何？人如何認識、核證數學（其物元、根本）的？

3. 方法論（methodology）的角度

發現或發明數學的方法為何？學習數學的方法為何？其方法的規律性、邏輯性或是系統、規則為何？

當在課程中安排一門知識，一個重要的問題是：這門知識存在於課程中的價值。本文作者提出下列 2 種極端對比的價值觀作為分析數學課程價值的架構：

1. 客觀知態價值

從本體論來看，數學可視為有一實體獨立於學生（認知主體）外，是存在於客觀世界中，從知識論來看，數學的型態是由可分割的事實知識所組成，與作為認識主體的學生是可以分離的。學生學習的價值就是學習存在於學生之外的「客觀」數學內容，而學習的方法以透過邏輯性、系統性的認識知識為主。

2. 主觀經驗價值

從本體論來看，數學是在現象界及社會活動中蘊含的根本、物件、元件，從知識論來看，數學是透過人類溝通活動、辯證得出，其中最前膽的觀點是由 Lakatos（1976）所提出數學知識演變觀，其所提演變的方式乃提出猜想、反例、修改猜想、形成（部分）定義，透過這樣的反覆過程，直到定義找到公開認可的證明。學生學習數學的價值就是認識現象界及社會活動中的數學內容，而學習的方法以觀察、猜想、反駁或驗證猜想來探索現象界或社會活動規律為主。

（二）PISA 2022 與十二年國教數學領綱之數學學習價值的對比

十二年國教數學領綱在基本理念、課程目標、核心素養、學習重點各部分的描述與 PISA 2022 的研究架構時有相呼應之處，其中在公民培養的終極目的上，十二年國教數學領綱（2018，頁 5）強調「成為理性反思與道德實踐的公民」，此訴求乃為 PISA 2022 所提倡「成為具建設性、投入性與反思力的 21 世紀公民」的子集（謝豐瑞等人，2025，頁

13)。綜觀十二年國教數學領綱，我們可以發現其所涵蓋的數學教育思維非常廣泛，然而當我們聚焦於實際執行面時，整個十二年國教數學領綱僅存學習表現與學習內容主導其發展與實踐；這個情形的產生可視為是必然的結果，因為高位的課程精神、理念、目標，往往僅能以抽象的、概括性的描述呈現，這樣的呈現方式，在教科書審查上或實際教學執行上，並無法以較為具體的指標加以檢視，因而這些高位的課程議題在實際執行面上僅會被束之高閣，無法落實。

上述情形並非僅限於十二年國教數學領綱的施行，本文作者之一從 1993 年版的數學綱要開始即接觸數學教科書審查相關業務，教科書僅著重於學習內容或／且學習表現的狀況從未間斷過。十二年國教數學領綱的學習表現寫法是以對學生在各學習內容上應有的表現來撰寫，故已涵蓋數學內容及所欲表現。是以，由十二年國教數學領綱中的學習表現來對比 PISA 的評量架構，將可一窺其間之差異。

本文統計了十二年國教數學領綱中學習表現針對「表現」的動詞，以及 PISA 2022 評量架構中針對形成、應用、詮釋三數學過程中評量表現的動詞，所有動詞出現率達 1% 的百分比如表 1 所示。

由下表可看出來，十二年國教數學領綱學習表現與 PISA 2022 架構評量表現動詞（部分乃以名詞的方式呈現所要求的動作）可以完全配對的有 6 大項：理解、應用、認識、計算、操作、推論。十二年國教數學領綱有高達 43.75% 的學習表現是落在理解與認識上，而這 2 個動詞又約 100% 都以數學內容為受體；相對來看，PISA 2022 評量表現對理解與認識的重視遠不及十二年國教數學領綱，而其受體除數學內容外，又遍及對模型的限制與假設、真實情境如何影響數學程序、數學推廣等不同範疇。在應用這個項目上，十二年國教數學領綱頗為重視，不過實際上僅有 5.68% 是將數學應用於日常生活中，其他 11.36% 則是應用數學解數學問題。若將這些動詞的受體侷限在數學，則認識、理解、應用、計算、操作（其中五分之三為做數學）、推理數學內容的比例高達 75%，此顯示數學存在於課程中的價值，有極大一部分是為了學數學而學數學的客觀知態價值，學生認識、理解存在於個體之外的客觀數學內容，這些內容不須大量鑲嵌於其他載體上。

表 1 十二年國教數學領綱學習表現與 PISA 2022 數學過程評量表現動詞

十二年國教數學領綱	百分比	PISA 2022	百分比
理解	30.11	理解	9.59
應用／運用	17.05	應用	5.48
認識	13.64	認識類	8.22
計算	8.81	計算	1.37
操作	7.10	操作類	9.59
推論／推理	6.82	推論類	5.48
溝通	4.83	評判類	19.18
欣賞	2.84	詮釋類	10.96
描述／表述	2.56	表示類	6.85
觀察／察覺	1.42	調整類	6.85
判斷	1.14	建構類	5.48
		組織類	5.48
		猜測類	2.74
		比較	1.37
		測試	1.37

註：上述有加「類」一詞者，乃因 PISA 在同義動詞使用上並未嚴守單一用詞，而是搭配受詞順暢度使用，故以「類」稱之。舉例來說，「認識類」包含下列用詞：認識、識別、找出、擷取（數學資訊）等。

反觀 PISA 2022 最高的兩項為評判類與詮釋類，而其受體多元，例如，評估模式與規律的意義、批判模型、選擇模型或工具、解釋情境中的數學意義、詮釋圖表或真實世界等等，處處展現出數學與現象界或社會活動彼此相嵌的情形。除此，PISA 2022 評量表現中要求的調整模型、建構情境、摘要或組織情境等等也都顯示出其視數學嵌於現象界與社會活動中的主張。作者實際檢視 PISA 2022 的評量試題，可將全部試題分為 3 類，第一類具有現象界或社會活動情境且情境承載了數學，第二類為擬情境，即情境中的數學並非該社會活動或現象界所必要或自然承載的數學（如：某人依規律畫了數排紅藍相間的三角形圖案，要算有藍色三角形所占比率或判斷其所占比率是否恆低於 50%），第三類則無情境僅數學內容。PISA 2022 第三類無情境的題目僅占全部題目的 2.14%，而若將第二類擬情境也納入計算，則這兩類共占 3.85%，如此低的比例

充分顯示 PISA 2022 評量除了對於現象界及社會活動中承載數學的立場分明外，也標示其認為學生、數學、情境三者共互動的觀點，學生學習數學的價值偏向主觀經驗價值。

在我國傳統上，數學課程發展與實踐特別著重學習內容，即使是關於學生表現或能力的設定，絕大多數也在於認識、理解、應用哪些數學內容這類反映客觀知態價值的項目。舉例來說，在十二年國教數學領綱（2018，頁 10）中關於二次方根有一項學習內容為：「二次方根：二次方根的意義；根式的化簡及四則運算」，而其對應的學習表現則為：「理解二次方根的意義、符號與根式的四則運算，並能運用到日常生活的情境解決問題」。雖然提到日常生活的情境，但實際上即文字題或應用題，學生所接觸到的也多是書面呈現，經過「特殊」數值安排擬真（或可說失真）的日常生活情境。在解題的過程中，不易或不需感知數學如何真實鑲嵌在情境中，也不需做模擬、實驗、探索等個人解題活動，僅需找出情境中數量關係解出答案即可。當學生在做模擬、實驗、探索等等活動時，其在過程中所有經歷，將成為其自我經驗，並形塑其對數學知識的認知、體會、情感、連結（與現象界、社會活動的）。

如果我國十二年國教數學領綱的發展有意圖更加重視國際數學評量所採用的主觀經驗價值，那麼在課綱的發展與撰寫上即需展現出相應的價值觀，其中在以表現為主的學習表現設定上，應反映出學生的數學學習需包含透過觀察、猜想、反駁或驗證猜想等來探索（如模擬、實驗）現象界或社會活動規律中的數學現象。如前所舉的二次方根之例，課綱可以明定學生需能在現象界或社會活動中透過觀察、猜想、探索找出物體與環境交互作用中顯現的二次方根，又或者甚至能製作出含二次方根數值的物件。又例如，可以明定學生需能透過觀察、猜想、反駁或驗證猜想等來探索多種暫時性或永久性的關係或變化，以適當的一次或二次函數（含自變量在現象界或社會活動中的適當範疇）來描述關係與變化，並能詮釋該關係或變化隨著哪些實際現象中的變量（如時間、長度、重量等其他物體的變化）產生變化以及變量對關係之影響（如離散的、

連續的、永久的、暫時的)。這樣的學習表現項目若落實在評量上,則評測的項目就會包含找出現象界或社會活動中的數學變量、猜想與驗證變量的關係、探索變量對變化與關係的影響,以函數描述該關係,以變量解釋現象界或社會活動中數量的變化與規律等項目。當浮現如此樣貌的學習表現項目時,可預見學生與數學的互動有機會跳脫現有透過教師傳遞或紙筆認識、理解、應用數學知識為主的學習模式。

二、學生與數學互動的方式面向

(一) 數學思維、運算思維、科技工具的交織

PISA 2022 認為數學素養乃是在各種真實世界情境脈絡中體現的(OECD, 2023a),而此界定中個體所處的「真實世界」乃是「由新科技驅動而快速變動的世界」,而公民身處這樣的世界中,應透過數學的幫助,成為具有建設性、積極參與,且善於反思的個體,並能為自己及所處的世界做出有充分依據的判斷與決策。事實上,科技工具在現今世界中扮演重要角色,以及數學教育中地位愈發重要等觀點由來已久,早在 30 年前,Winkelmann (1994) 強調科技已然改變個體與數學互動的方式,他認為透過科技,個體得以進行各種數據分析、模擬,從而提升可處理的數學複雜度,而這些方法也同時顯示進行數學實驗的可行性;Noss 與 Hoyles (1996) 則更深入指出電腦或其他科技產品影響了知識的本質與結構:

聚焦於科技會將我們的注意力帶到認識論上:新科技——所有的科技——不可避免地改變知識如何結構起來,以及知識對每個人的意義。從這個角度來看,電腦和筆無異,只是在我們這個時代,電腦迫使我们更直接地面對這一變革。(頁 106)

幾十年來，科技融入數學教學與評量之推廣與探究在全球許多國家蓬勃發展。然而，PISA 2022 所提出的觀點並非只是科技工具與數學的結合，而是進一步提出運算思維（computational thinking）的角色，指出數學素養中數學思維、運算思維、科技工具交織關係：

數學素養的長期發展應含有數學思維與運算思維之間的協同與互補運作……，這樣的思維運作被視為在形成、思構問題，以及設計解決方案時必要的思維過程，而此過程可以由電腦、人類，或兩者結合來執行。（OECD, 2023a, p.22）

換言之，從 PISA 2022 的角度來看，公民所被期待具備的數學素養包含了數學思維、運算思維的結合，以及人類與科技工具的協作。唯有以此為目標來培養學生的數學素養，才能給予他們更真實的視角，使他們理解數學在專業領域世界及真實世界中的實踐，這也反映了 PISA 2022 所採納的「主觀經驗價值」取向。

PISA 2022 認為在數學教育中，科技工具可以如何為學生提供協作機會，來讓他們經歷數學思維、運算思維、科技工具三者的交織呢？圖 1 為本文改編自 PISA 2022 的題目（該題並非 PISA 2022 的正式試題，但能呈現類似的思維與工具交織情況與過程）。

此題目提供互動式的估算器，用以預測兒童成年後的身高，學生可以選定孩子的性別、目前年齡、身高、體重、母親身高、父親身高等變數的數值，其中性別、目前年齡以下拉式選單點選，其餘 4 個變數可直接輸入數值，或是點選上下按鈕來調整，每次點擊可增減 1 公分或 1 公斤。當學生設定好六個變數的數值後，點擊「計算身高」按鈕，估算器將根據設定之數值計算預測的成年身高，並將設定的數值與結果顯示於下方的表格中。表格最多可記錄 6 筆資料，學生可刪除舊資料並新增新資料。題目請學生判斷父親身高、母親身高兩個變數中，哪個對兒童成年後身高影響較大，也請學生選擇 4 筆資料來支持其判斷。

估算兒童成年身高

▷ 如何使用兒童成年身高估算器

根據右邊的說明，你可以使用兒童身高估算器，來幫助你回答以下問題。點選一個答案，然後選擇表格中橫列的數據來支持你的答案。

哪個變數對孩子成年時的身高影響較大？

☐ 母親身高

☐ 父親身高

✓ 請在表格中選擇 4 筆資料來支持你的判斷

估算兒童成年身高

以下估算器根據孩子現在的身高、體重，以及孩子父母的身高，預測孩子成年時的高度

兒童成年身高估算器

性別：
☐ 男 ☐ 女

年齡：
歲

身高：
公分

體重：
公斤

母親身高：
公分

父親身高：
公分

清除

計算

性別	年齡	身高	體重	母親身高	父親身高	成年身高	✓

圖 1 PISA 2022 試題之改編範例

本題的答案與父母身高的改變單位如何界定有關，若改變單位選擇固定的值（如 5 公分），則父母身高的影響是一樣的，若改變單位選擇固定的百分比（如 10%），則父母中身高較高者影響較大。對許多學生而言，這樣的問題情境是全新的，他們未必能直接以有條理的方式操作估算器並判斷答案。然而，因為估算器所具有的可互動性，促使學生動手操作，進而啟動腦中思考，而每一次的設定輸入與估算器的回饋輸出，又提供學生下次調整的根據，學生因此而有了與情境中數學互動的機會。透過操作估算器、觀察分析表格紀錄，學生有機會形成想法，發展一套可重複執行的程序（如如何改變變數、如何系統性測試不同變數數值），經歷制定演算法、自動化程序等數學思維、運算思維交織的思考過程，並與估算器協作來執行。學生也可能有更一般化的猜想，例如，他們可能猜測採用另一種改變單位的方式是否影響結論，而估算器提供學生快速嘗試多個例子並立即得到回饋的機會，使得驗證或反駁想法變得可行。

PISA 2022 新發展的數學試題中，約有 2 成題組需要學生在解題時與科技工具協作，而協作的模式皆非單純的計算。底下介紹 2 類 PISA 2022 試題中常見著重學生數學思維、運算思維與科技工具交織的學生——科技協作模式。若欲更深入瞭解相關題目，可參閱謝豐瑞等人（2025）及 OECD（2018）中的試題示例。

1. 「輸入——輸出」操作中的思維與科技交織

在 PISA 2022 的試題中，有不少像圖 1 這類學生自己輸入數值、科技工具輸出相應之回饋結果以產生實驗數據，進而透過學生——科技協作來解決的問題。這類問題在反映數學與真實世界相嵌的情況下，往往輸入或輸出的變數不只一個。齒輪題組是輸入多個變數，而這些變數共同影響一個輸出結果的例子（見本文 p. 222）。另外，在一噴水池題組中，則是輸入投射角度單一變數，該變數同步影響噴射水柱之水平距離、垂直距離兩個應變數的結果。在這些「輸入——輸出」的學生——科技協作過程中，學生分析比較多筆資料、實驗調整數據、識別拆解或抽象出關係與模式、設計解法程序、作出有據判斷。

2. 「大量數據運算與排序」操作中的思維與科技交織

另一類 PISA 2022 常見的學生——科技協作來解決的問題反映的是現今社會常見的資料呈現，也就是以工作表來呈現多個樣本的多維度資料，圖 2 為其中一例。學生需要透過與科技協作，才能快速處理大量數據，透過對所有樣本同步作運算或排序來解決問題。在這些「大量數據運算與排序」的過程中，學生需要制定一系列的解題步驟，包含每步驟要運作的對象、要進行的運作，以及步驟之間的順序。

無論是「輸入——輸出」或是「大量數據運算與排序」模式，這類要求學生——科技協作之試題，除了前述提到的制定演算法、自動化程序等思考，學生也往往會經歷 PISA 2022 評量架構中強調的 21 世紀技能：研究探究、批判思考、系統思考、反思、溝通、創造思考等。



圖 2 PISA 2022 試題「森林面積」

資料來源：謝豐瑞等人（2025）；引自 OECD（2023b）。

相較於 PISA 2022 關於科技工具使用的前瞻觀點，臺灣十二年國教數學領綱（2018，頁 2）明白指出臺灣「即使在最基本的計算機教學，都遠遠落後於世界各先進國家」，因此，十二年國教數學領綱（2018，頁 2）在其基本理念中提出「數學教學應培養學生正確使用工具的素養」，而計算機、電腦、網路、多媒體、行動工具等包含在其所指的工具中，然而在其學習表現中僅要求使用計算機，顯示數學領綱的規劃應欲從計算機的使用起步，期許能逐步引導學生使用更高階科技工具。然而，從十二年國教數學領綱（2018，頁 12，14）中具體的學習表現條目來看，僅有 3 項提及計算機，分別為：「n-IV-6 提及應用計算機計算、驗證與估算二次方根估計值」；「n-IV-9 提及以計算機計算值，如比值、四則運算等」；「n-V-2 提及判斷使用計算機的時機」。從中可看出數學領綱條目中非計算功能的科技工具使用僅有「驗證」以及「判斷使用計算機的時機」。反觀 PISA 2022 針對科技的觀點，認為數學思維、運

算思維、科技工具三者交織是問題解決的核心過程，也是學生在當今與未來科技日益重要的世界中取得成功所需之關鍵技能，兩者相去甚遠。

（二）解決問題與學習的融合

傳統東亞數學教育強調「兩項基礎」（two basics），重視「扎實的概念基礎」與「應用技能」（Zhang et al., 2004）。然而，PISA 2022 卻提出：

每位學生都應學習（並給予機會學習）如何數學化地思考，透過數學推理（包括演繹與歸納推理），結合一小部分支撐此推理的基本數學概念來進行學習，而這些概念本身未必會被直接教授，而是在學生的學習歷程中逐步清晰並被強化。（OECD, 2023a, p. 20）

這是否意味著 PISA 2022 認為數學概念的學習不再重要？

事實上，PISA 2022 的觀點是，透過科技工具能夠創造有效的學習環境，讓學生在數學思維、運算思維與科技工具的交織運作下，探索數學學科中的關鍵概念、深化數學內容的學習、具體化抽象概念，並能以新的方式表達想法且與數學概念互動。以圖 1 的例子來說，其牽涉的數學模型是 $Y=a_1 X_1+a_2 X_2+a_3 X_3+a_4 X_4+a_5 X_5+a_6 X_6$ ，學生面對的是一個從未接觸過的新情境及新數學模型，學生所經歷的不只是解題活動，同時也是學習活動；試想，若直接讓學生操弄此複雜又抽象的數學模型，可想而知學生將束手無策。然而，透過與科技工具協作，學生在逐步解決問題的過程中，不需直接處理形式化的數學模型，而是能以「對應」、「變化」等函數中的基礎想法作為起點，並在解題過程中自然經歷如多個自變數對應單一應變數的新數學知識。此例的精神在 PISA 2022 試題中處處可見，其所重視的並非抽象、形式化的知識概念，而是真實世界情境中承載的重要數學想法，透過與科技工具協作來與這些數學想法互動，在解決問題的過程中，建構更深層的數學理解。

在 PISA 2022 中，就「輸入——輸出」或「大量數據運算與排序」

這兩類關於學生——科技協作的問題來看，學生需要的數學知識僅涉及 9 年級以下，且皆為最基本的內容，然而，這兩類問題的平均答對率分別是 62% 與 49%。此結果顯示，問題解決的困難點或許並非取決於學生是否具備相應的數學概念，而可能來自於前述各種思考技能的不足，而臺灣參與的 OECD Future of Education and Skills 2030 Project 之研究結果也呼應此現象。該計畫對依據臺灣十二年國教數學領綱所編寫的數學教材進行分析後發現，八年級數學課本與習作的所有題目中，僅有 2.34% 涉及 21 世紀公民所需的關鍵思考技能（包括溝通、創造思考、批判思考、資訊運用、反思、自主堅持與系統思考），而其中僅 0.26% 的題目布於真實世界情境之中（Schmidt et al., 2022）。

如果我國十二年國教數學領綱的發展有意圖更加重視國際數學評量所強調的數學思維、運算思維、科技工具之交織，那麼可包含一個區塊，明定如「使用科技工具支持數學探究」、「與科技工具協作制定解題程序並解決問題」等內涵，並在這個區塊中明定應／可包含的數學內容或學生學習表現條目，使之成為欲實踐的具體項目，並可在課綱輔助文件中，提供如 PISA 呈現的具體評量示例，幫助教學現場設計與執行結合運算思維、21 世紀技能的教學與評量活動。

三、數學題材著重面向

（一）PISA 與國中課綱在數學內容與比例上的差異

PISA 2022 評量核心強調學生在解決問題時所展現的歸納（inductive）與演繹（deductive）推理能力。在命題時重視從真實世界情境中引發數學思考，讓學生自己先產出多個數據或例子，再進一步觀察數據、辨識規律，逐步發展出概念或關係，最後進行判斷或決策。這樣的設計不僅體現了由具體經驗中歸納出原理原則，再運用原理原則進行演繹的歷程，也反映了 PISA 對數學素養的立場；相對來看，由臺灣十二年國教數學領綱強調認識、理解、應用的強度以及教學現場實踐的

狀況來看，教學與評量通常直接進入以演繹推導與公式應用為主的取向，或是先以事先設定好的例子說明再快速進入演繹推導與公式應用。這兩種取向不同的主因之一乃來自於對 21 世紀學生需要之素養看法不同，如序言所述，PISA 認為數位化的世紀重視量化分析與數量推理，這種立場也顯現在其評量數學題材的選取上。

從數學內容的類別分布來看，PISA 2022 試題數學內容的占比依高至低分別為，「數量」占 32%、「不確定性與資料分析」占 26%、「變化與關係」占 24%、「空間與形狀」占 18%（如圖 3）。相較之下，臺灣十二年國教數學領綱執行之國中階段各個數學內容所占教學節數的比例（根據教科書教師手冊之建議）來看，在國中階段，依上述數學內容次序分別為 25%、6%、35%、33%；若再加上 10 年級的內容，比例則為 25%、12%、40%、23%。這樣的結果顯示十二年國教數學領綱在 PISA 2022 占比最重的「數量」及「不確定性與資料分析」上占比明顯偏低，尤其是後者，最高僅占 12%，還未達 PISA 2022 所占 26% 的一半。除此 PISA 2022 占比最低的「空間與形狀」在臺灣國中階段的占比卻異常的高，即使加上 10 年級的內容，占比仍高於國際的設定。

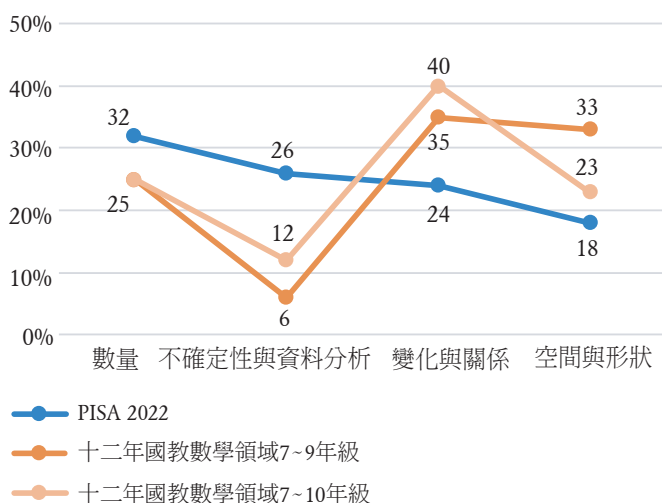


圖 3 PISA 2022 與臺灣十二年國教數學領綱數學內容占比

（二）PISA 對四大新興數學主題的重點論述

PISA 素養評量架構中的數學內容知識並不是依數學內容邏輯之單元架構劃分，而是根據各種真實生活情境中承載的數學現象組成的，這些真實生活情境涵蓋個人、職業相關、社會與科學現象。這樣的優勢在於，更容易幫助學生理解數學如何存在於各種現象中，而非僅學習分散的數學概念。舉例來說，用模式、變化或是關係等來組織數學內容，相較於依傳統數學單元分類，前者更能使數學概念靈活地在不同情境中建立關聯。另一優勢則是避免數學內容過於細分影響試題選取，使無法展現數學在真實世界問題中的樣貌，如此將使得評量未能針對學生生活在 21 世紀所需數學素養取材。

PISA 2022 考量 21 世紀新興經濟領域（如高科技製造等）及現代社會變遷的情況，特別關注下列 4 個數學主題，這些主題並非全新的數學概念，而是現有四大數學內容類別中值得特別強調的主題，此四主題分別為：

1. 增長現象（變化與關係）

在「變化與關係」中，PISA 強調數學是描述與解析萬物變化與關係的工具。物體會與環境產生交互作用，其變化可能受到時間或其他因素的影響。數學則透過函數、方程式、圖形與統計等方法，來描述與表徵這些變化關係。

PISA 2022 在此數學內容中特別強調增長現象（growth phenomena），並公開一個關於「利息與儲蓄」（OECD, 2018）的範例試題當作說明：透過電腦模擬，學生可以同時控制 4 個變數（存款期長、每月存款、年利率、本利和），來模擬三種計算模型（計算本利和、計算每月存款、計算存款期長），每次模擬產生的結果皆以表格呈現，幫助學生直觀理解變數之間的關係，然後回答關於變數之間的增長關係，並給出解釋。

PISA 認為許多現象的理解（如疫情流行、細菌感染、氣候變遷、經濟增長），僅考慮線性關係是不夠的，往往需要考慮非線性模型，如

二次增長或指數增長。然而，PISA 雖關注，卻不要求學生學過指數函數，而是希望學生能認識非線性增長的存在，理解其對現實社會的影響，並能直觀理解指數增長的特性（極快速的變化）。在十二年國教數學領綱（2018，頁 59）中，也有涉及增長與衰退的條文，例如在 f-V-4 中指出：「認識以指數函數為數學模型的成長或衰退現象，並能用以溝通和解決問題」，然此處的學習是從函數結構的角度出發，進一步應用於如儲蓄等具體問題的分析上，與 PISA 強調的直觀認識與現象理解略有不同。

2. 幾何逼近（空間與形狀）

PISA 在此類別涵蓋各種視覺與實體現象的理解與操作能力，以幾何為基礎，融合空間視覺化、測量與代數等元素，已超越傳統幾何範疇，重視距離計算與空間推理能力，以及在需要使用工具（科技）的情境中，有效辨識、操作與解釋各種形狀與其表徵方式。

在現代社會中，不規則形狀日益普遍，傳統幾何公式有時難以應對這類情境。對此，PISA 2022 特別強調「幾何逼近」（geometric approximation）的重要性，認為學生應能靈活運用空間與形狀概念，估算不規則物體的面積或體積，而非僅依賴公式的直接套用或強調計算技巧。例如，當房間形狀出現銳角或曲線時，其計算方式將不同於傳統長方形房間，須採取不同的幾何逼近方法。十二年國教數學領綱雖未明確使用幾何逼近一詞，但在國小階段可找到類似概念的教學實踐。例如，S-6-3 條文說明「利用活動說明一般不規則區域的面積要如何理解和估計」（十二年國教數學領綱，2018，頁 34），對應教材有方格估算法與切割估計圓周長，已初步展現幾何逼近精神。然而進入國中後，重點轉向公式運用、圖形性質與坐標幾何，教材或試題中與幾何逼近相關的題目較不常見，多為幾何切割，已較少涵蓋逼近或類似概念。

3. 電腦模擬（數量）

PISA 在數量這一類別所涵蓋的數學內容，無論是在量化與量的基本認識、數感與合理性評估、或是趨勢與模式的辨識與理解、表徵與推理的運用，在數學領綱皆有相對應的學習表現。

PISA 2022 中特別強調的「電腦模擬」（computer simulations），是指在面對龐大數據或複雜多變的情境中，透過電腦進行模擬計算，而人的角色則在於操控變數、規劃情境、預測結果並作出決策，藉由模擬結果進行問題解決與判斷，例如，前述儲蓄與利息的示例。而數學領綱雖有提及電腦的使用，但其應用範圍主要著重於數值計算、繪製統計圖表，或將方程式與函數轉換為圖形表徵。例如，十二年國教數學領綱（2018，頁 57）中指出：「可適當使用電腦輔助教學範例，例如，以電腦協助講授函數圖形、立體幾何、解方程式和統計課程等」。然而，這與 PISA 2022 所強調的電腦模擬概念仍有明顯落差。頂多當落實在教科書中時，可有一些實作的探索活動，稍具模擬的意涵，但多數仍停留在操作層面，尚未達到以電腦模擬進行變數操控與決策推演來解題的深度應用。

4. 有條件的決策（不確定性與資料分析）

在統計相關的數學內容中，PISA 2022 著重在理解真實世界情境脈絡中無可避免的變異性和不確定性，以及在情境下如何進行合理的推論與決策。在此數學內容上，PISA 2022 特別強調「有條件的決策」（conditional decision making）之重要性，透過二維表格（包含列聯表）呈現資料，引導學生進行不同類型的機率估計與統計推論，同時，希望學生能意識到，不同的假設／關係或分析方式可能導致不同的結果，從而培養其在數據分析中的判斷與決策能力。

十二年國教數學領綱已於 7 年級階段納入列聯表製作相關內容，並於 9 年級納入重覆試驗下的機率計算；至於涉及機率估計與統計推論的相關內容，則安排於 10、11 年級。整體而言，領綱在 7、9 年級著重於由生活經驗認識簡單機率；10 年級以後則著重於機率與統計知識的介

紹及應用，較偏重專家解法下根據專業知識所作的決策。然而，PISA 所強調的「有條件的決策」，並不僅依賴統計知識本身，而是重視學生能在真實情境中，根據對情境的理解與感知，以及對資料的合理解讀進行符合生活經驗且具判斷力的推理與決策，由此看來，現行領綱的編排與 PISA 2022 所強調的「有條件的決策」，仍存在一定差距。

以 PISA 2022 測驗中的「國際學校」題目為例，該題以列聯表呈現全校來自六個不同國家共 95 位學生分布在 5 個 9 年級班級的人數。第 1 小題問每班平均人數。第 2 小題問隨機抽取一名學生，而此學生來自某國且屬於某班的機率為何。第 3 小題問隨機抽取一名學生，不是來自某兩國的機率為何。有 81% 的臺灣學生正確回答第 1 小題，顯示這些學生看得懂該列聯表；然而，儘管其後第 2、3 小題僅需瞭解生活中會接觸到的用語「隨機抽取」，及觀察表格中的數據即可作答，但臺灣學生正確回答的比率卻大幅下降至 38% 和 58%；更甚者，這兩小題臺灣 10 年級學生的得分率比 9 年級學生分別低了 17% 及 11%；PISA 2022 另一題關於隨機抽樣若干 9 及 10 年級學生，作答需考慮給定前提（條件機率的想想法）來判斷哪一個年級學生會演奏樂器的可能性比較大，臺灣在 9、10 年級同樣都未學過條件機率的情形下，10 年級學生的得分率同樣比 9 年級低了 11%。一個合理的懷疑是臺灣 10 年級學生依賴如公式這類專家解法的情形較 9 年級更加嚴重，對於未學習過的概念，未意識到自己可以在真實世界中透過對生活經驗的理解與感知來解讀資料，再與自己舊有推理基模連結來完成任務，故失去了自己逐步發展、強化、形成、展現概念的機遇，此乃學校課程重視客觀知態價值的可能隱憂，學生學習恐著重於客觀知識的獲得而非適應環境變化中素養的發展，也就是學生並未獲得充分的機遇認識真實情境中可能產生的各式各樣資料，且未對資料來源、用途、意義等有感，也沒有被強化在解題任務要求判斷時根據各限制條件（如限制在子樣本範圍時）進行資料的探索與推理，這也可能阻礙學生發展如機率與統計這類大量承載於真實世界中數學知識的處理或推理能力。

（三）PISA 2022 與臺灣命題取材的差異

PISA 和臺灣在命題取材時，主要有以下不同之處：

1. 真實情境命題設計

PISA 強調試題應根植於各種真實世界的情境脈絡，題材來源多元，涵蓋個人生活、職業應用、社會議題與科學情境，旨在評量學生是否具備應對實際問題所需的數學素養。這些真實情境往往具備開放性、複雜性與多變性，挑戰學生的不只是公式運用、計算能力，更看重的是對情境的理解、資料的詮釋與進行合理決策的能力，且試題的設計與呈現，融入 21 世紀技能中與數學素養相輔相成的八大思考技能，因此在形式與內容上，與傳統為評量特定知識概念的試題會有所差異。臺灣在設計題目時，常常是從一個既定的個別或數個數學概念出發，確立好教學或評量的核心內容，再去找適合此數學概念的情境例子當作題目的包裝或背景設定。這樣的設計方式，主要是希望學生能夠辨識並正確應用先前學習過的數學知識來解決問題。因此，在建構題目情境時，會弱化或排除與該數學概念無關的變因（干擾），強調的是強化學科知識的聚焦與應用。

2. 漸進式的任務特徵

PISA 2022 在試題設計上多採題組形式呈現，讓學生在回答問題的過程經歷從觀察趨勢、理解數據到推論判斷的層層思考歷程，測驗的不僅是單一技能，而是引導學生整合多種數學思考進行推理。相較之下，臺灣試題仍多著重於單一題目知識面的測驗，較少出現具連貫性、結合多項重要數學概念與思考技能的題型。雖然近年國中會考的題組題與非選題在設計上已有些微朝此方向發展，但比例仍然有限。

3. 由下（數據和例子）而上（數學概念或解題策略）的數學思考歷程

PISA 2022 試題的一大特質，在於題目往往讓學生先從情境中主動觀察、產生數據，或舉出例子，再進一步從所產出的物件中發展數學關

係、規律，進行情境中的決策與判斷，這樣的設計鼓勵學生從具體情境出發，經歷資料閱讀整理、模式識別與關係建構的歷程，在思考上往往結合了數學思考、運算思考、21 世紀技能。而臺灣的試題則常直接一開始就以形式化、結構化的方式呈現完整的條件與數據，學生只需套用既有的公式或概念進行計算或邏輯推理以求解，較少引導學生自己去建構關係，經歷歸納推理的過程。

4. 跨領域的模糊情境

PISA 強調與真實生活緊密連結的情境，因而試題經常呈現跨領域特性，例如，結合數學、物理與生活經驗等內容。然而，一旦牽涉到自然現象或生活經驗，就難以避免會觸及其中的模糊性與非線性特質，而這些特質常被傳統命題觀點視為一種不準確與不必要的干擾因素，然而事實上數學界為瞭解決精準與真實關聯間的衝突，也發展了模糊集理論（Fuzzy set theory）來嘗試應對（Zimmermann, 2010）。臺灣長期以來，入學考試牽涉到學生後續就學，往往要求嚴謹、精準，不容模糊空間的存在，此對學校現場的命題有極大影響，為求一個標準答案，而將整個情境簡化為較為理想化的「仿真」擬情境，以減少真實狀況中可能出現的複雜與不確定。而這樣的結果，有可能導致學生難以將學校所學應用於生活。

以下舉 2 個例子說明前述 4 個 PISA 2022 命題特點與臺灣命題間的差異：

1. PISA「駕駛視野」問題

「駕駛視野」問題透過圖示介紹駕駛的有效視野如何受視角和車速影響，並提供 4 種不同速度下的有效視角散布圖，圖中也畫出最適直線（the line of best fit），其中題目所給的 4 種速度皆不在最適直線上，顯示出此直線「非精準」直線，題目並標示對應的視角度數與車速直線方程式，學生需據此選答，當車速持續增加時，駕駛的有效視角會如何變化。第 2 題則進一步要求學生計算：當車子時速為某一非題目中 4 種

速度之另一定值時，駕駛的有效視角為多少度。第3題則引入可能的真實情境，情境中一輛車以某固定時速行駛在一個已知寬度的馬路正中央時，此時行人穿越道旁站著一位行人，題目要求學生推算：在維持此車速的情況下，汽車與行人穿越道間的最短距離為多少，駕駛仍可看得到該行人。

此題充分展現了「真實情境往往涵蓋多個數學內容」的特質，其布題是具有模糊性（最適直線）的「不確定性與資料分析」，在其3個子問題中，前兩小題是「變化與關係」，第3小題則轉變成「空間與形狀」。題目同時整合多個重要數學概念，例如，散布圖、最適直線、函數關係、畢氏定理與三角比，且結合駕駛視角、行人動線與道路寬度等情境設定，問題本身皆貼近學生未來實際可能遭遇的場景，有助使學生體會數學在真實世界中所扮演的角色，並能對數學模擬的樣貌有初步的認識與理解。

2. PISA「齒輪」問題

齒輪是真實世界尤其是工業社會中常見的機械裝置，題目設定貼近實際情境，由兩個輪齒相互咬合的主動、被動齒輪組成一組齒輪組，情境涉及4個變數：主動與被動齒輪的齒數，以及兩者的轉速。學生可透過電腦模擬操作，自行多次選擇變數的數值，例如，主動、被動齒輪的齒數數值，產生數據並進行探索與觀察；第1小題學生在每次輸入主動、被動齒輪的齒數數值後，系統會自動輸出對應的 R 值（被動齒輪齒數 T_1 ／主動齒輪齒數 T_2 ），學生需要根據這些數據歸納寫出 R 的代數式（ T_1 / T_2 ），這一小題牽涉的是2個變數間的關係。第2小題則進一步牽涉4個變數的關係，題目要求學生從多個選項中選出一個能正確描述主、被動齒輪齒數與轉速這4個變數之間關係的選項。

若此題無法透過操作模擬，所有數據便須由題目預先提供，學生的思考被框在封閉的數據中，而無法嘗試自己有感的開放數據。在臺灣，齒輪情境有時會被納入正、反比單元中命題，評量的重點往往不在於學

生觀察數據關係或探索多個變數間的自應變關係，而是直指情境中存在正比或反比的數學關係，要求學生利用定義以解題。也就是，雖然同樣具有情境，但臺灣所使用情境的實質功能與純粹抽象的文字敘述題相差無幾，對學生認識齒數如何影響齒輪帶動及轉速中之數學現象並無幫助，也就是臺灣題目中齒輪情境可任意更換成其他各種正、反比關係的情境，情境本身對學生認識其中承載的數學與其推理的幫助有限。

如果臺灣十二年國教數學領綱的發展有意圖更加重視國際數學評量所著重的數學題材範疇與命題取材特質，則在國中階段，可適度增加數量及統計所占的比例，減少空間與形狀的占比，尤其是完全未涵蓋於 PISA 2022 中的平面幾何推理，可慎重檢討其在國中課程中的必要性。除此，在課綱中可明定積極納入真實情境、資料探索、有條件決策為主的數學推理解題任務，以及跨領域及跨數學內容的漸進式推理解題任務。

參、結語

PISA 2022 認為，長久以來，許多國家數學課程的要角在於數學主題、運算程序以及應用數學解決可預測的實際情境問題（OECD, 2023a），然而隨著科技的發展，這一論據的說服力逐漸削弱，因為許多數學程序已可自動化，侷限的情境伴隨狹隘的數學程序理解不足以應對當今世界的需求，反而每位學生都應該掌握演繹推理與歸納推理能力，並結合一小部分支撐這種推理的基本數學概念；PISA 2022 同時認為，這些概念本身未必需要明確教授，而是在學生的學習經驗中逐步展現並強化（OECD, 2023a）。反觀臺灣十二年國教數學領綱中的要角，正與上述 PISA 2022 所提及國家數學課程之情形相近。

綜上所述，PISA 2022 數學素養評量不重視單純的數學內容知識，重視的是學生是否能透過各種真實世界情境中承載的數學瞭解數學在世界中所扮演的角色，並能根據推理做出判斷與決策。欲達此目的，在學習數學上，學生應透過數學思維、運算思維、科技工具三者互相的搭配

來認識真實世界中的數學現象與解決其中的問題，這樣的過程中，學生不僅能有效深化對數學概念、想法的理解，也能發展各種重要的 21 世紀思考技能。在數學題材上，則應更加強調真實世界中承載的數學主題，例如，量化分析、統計素養與機率推理等。

根據作者長期的經驗，學校數學學習的價值在臺灣從未被嚴謹的看待過，數學界與數學教育界雖皆關心臺灣數學課程的趨勢，但也從未為此進行過良好的溝通或辯證。本文比較了我國數學課程學習表現架構及代表前瞻角度的國際 PISA 2022 評量架構，結果顯示，相對來看我國較重視客觀知態價值，PISA 2022 較重視主觀經驗價值；這兩種立場，恰能對應到我國數學界及數學教育界在數學學習價值上的相對立場；前者著重數學的客觀價值，即使許多學生未來用不到某些數學，仍應將數學視為一種知識來學習；但後者著重數學對學習者的主觀價值，學習者因應個體的需求，經驗真實世界承載的數學現象。

臺灣歷屆課程綱要訂定雖皆有公聽會及收集各界意見的過程，但這些外部意見在決策過程中能否發揮實質作用，往往取決於其與課綱訂定委員立場差異的多寡。不同領域的人因其自我的經歷，往往有較偏重的價值觀，此乃必然的現象，但牽涉國家課綱走勢，各界宜致力於更正式、善意、長期的溝通，透過辯證達成共識，以利我國課程的發展與執行。

參考文獻

十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域（2018）。

[Curriculum guidelines of 12-year basic education: Mathematics domain for n for elementary, junior high school and upper secondary school education. (2018).]

謝豐瑞、王婷瑩、吳嵐婷、林素微、陳佳欣（2025）。臺灣學生的數學素養表現。載於蔡今中（主編），**PISA 2022 臺灣學生的表現**（頁 13-94）。國立臺灣師範大學臺灣 PISA 國家研究中心。

[Hsieh, F.-J., Wang, T.-Y., Wu, L.-T., Lin, S.-W., & Chen, C.-H. (2025). Mathematical literacy performance of Taiwanese students. In J.-C. Tsai (Ed.), *Performance of*

- Taiwanese students in PISA 2022* (pp. 13-94). Taiwan PISA National Research Center, National Taiwan Normal University.]
- Alkin, M. C. (1973). Theoretical framework for the analysis of curriculum and instructional reform. *International Review of Education*, 19(2), 195-207. <https://doi.org/10.1007/Bf00598111>
- Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. Routledge.
- Gouëdard, P., Pont, B., Hyttinen, S., & Huang, P. (2020). *Curriculum reform: A literature review to support effective implementation*. Organisation for Economic Co-operation and Development. <https://doi.org/10.1787/efe8a48c-en>
- Johnson, M. (1973). The context of national educational reform. *International Review of Education*, 19(2), 187-194. <https://doi.org/10.1007/BF00598110>
- Lakatos, I. (1976). A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics. *The British Journal for the Philosophy of Science*, 27(3), 201-223. <https://www.jstor.org/stable/686119>
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Kluwer Academic. <https://doi.org/10.1007/978-94-009-1696-8>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2018). *PISA 2021 mathematics framework draft*. <https://pisa2021-maths.oecd.org/files/PISA%202021%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023a). PISA 2022 mathematics framework. In Organisation for Economic Co-operation and Development (Ed.), *PISA 2022 assessment and analytical framework* (pp. 18-100). <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (2023b). *PISA 2022 results: The state of learning and equity in education* (Vol. 1). <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Schmidt, W. H., Houang, R. T., Sullivan, W. F., & Cogan, L. S. (2022). *When practice meets policy in mathematics education: A 19 country/jurisdiction case study*. Organisation for Economic Co-operation and Development. <https://doi.org/10.1787/07d0eb7d-en>
- Winkelmann, B. (1994). Technology in mathematics teaching. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strässer, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 171-223). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/0-306-47204-X_5
- Zhang, D., Li, S., & Tang, R. (2004). The “Two basics” : Mathematics teaching and learning in mainland China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 189-207). World Scientific.
- Zimmermann, H. J. (2010). Fuzzy set theory. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 2(3), 317-332. <https://doi.org/10.1002/wics.82>

