

## 論壇

# 數學素養的理論與教學實踐

| 張鎮華

## 壹、重視核心素養的十二年國教課程綱要

這一輪中小學教學推動的是素養導向的課程綱要。2014年《十二年國民基本教育課程綱要總綱》（以下簡稱《總綱》）為落實十二年國民教育課程的理念與目標，倡導以「核心素養」為課程發展的主軸。根據其解釋，核心素養指的是一個人為適應現在生活及未來挑戰，所應具備的知識、能力與態度；它承續過去課程綱要的「基本能力」、「核心能力」與「學科知識」，但涵蓋更寬廣和豐富的教育內涵，不再以學科知識作為學習的唯一範疇，而是關照學習者可將所學整合運用於「生活情境」，強調其在生活中能夠實踐力行的特質。《總綱》論述的核心素養分為三大面向，再細分為九大項目，作為各領域的引導。數學領域依此指引，分別在國小、國中、高中3個學習階段，寫出數學領域的核心素養，共有27條具體內涵（十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域【十二年國教數學課綱】，2018）。

在研修《總綱》之前，2013年曾志朗院士主持「國民素養」研究計畫，其中數學領域的部分由李國偉主持，李國偉等人（2014，頁5）對數學素養的定義是：

---

張鎮華，國立臺灣大學數學系名譽教授，E-mail: gjchang@math.ntu.edu.tw

個人的數學能力與態度，使其在學習、生活與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效與他人溝通觀點。

這個解釋把數學素養分為四個重點：學科知識，應用於學習、生活與職業生涯，正確使用工具，有效與他人溝通。這個說法與《總綱》不謀而合。

早在 1968 年，水心就提到：「由於數學知識本身之急遽增加，因而對於現代公民應有的素養，提出了比以前更大的要求」（引自單維彰，2018，頁 5）。素養指的是數學知識，這是在回應當時社會轉變的需求。1983 年《高級中學課程標準》昭示，高中數學課程有三方面的目標：素養方面、訓練方面、應用方面，其中素養被解釋為「瞭解數學的一般內容、方法與意義」，重點還是數學學科知識；這種說法和美國的數學課程綱要（Common Core State Standards for Mathematics）類似，但是後者不談素養這個字眼，他們重視觀念（concept）、技能（skill）、應用（application），只有觀念紮實、技能流暢之下，才談得上應用。

《總綱》對素養的解釋與 PISA 強調應用的說法類似，所以許多人用 PISA 的說法詮釋數學素養（一些數學教科書所標示的素養題其實是有情境的應用題），導致過度強調應用，常常忽略應用之前要有紮實的數學觀念與流暢的技能。事實上，根據個人這十年來參與課綱研修與宣導的經驗，過去臺灣數學教學的困難，常常是因為考試，教導過多數學知識內容（其中有些是不重要的或是太高級而困難的），訓練太多複雜的計算，導致學生普遍害怕數學。教師們應該思考的是，如何教導學生紮實的基礎概念，訓練流暢的操作技能，以解決問題，並培養他們正確使用工具的素養，以減輕複雜計算的負擔。

## 貳、重視基礎核心的數學學科知識

根據個人對於臺灣中小學教學現場的瞭解，教師傳授的數學知識分為三類。第一類是基礎核心的部分（可以稱為素養），這是學習時應該確實掌握的內容。第二類是延伸出來的知識，它們也可能是有用或有趣的，對學習能力夠的人，讓他們多學這些也很好。第三類是過度延伸出來的知識，也許是非常少數做專題研究的人才需要去探究的，也有一些是因為大考試題引發出來的題型，這些是大部分人不需要花功夫去學習的部分；過去讓學生過度負荷的原因之一，就是出現太多這一類的學習內容。下面以一些（非全部）高中數學內容為例，說明如何避免過度延伸的內容。

### 一、坐標平面上的直線方程式

不管是 2013 年修正《普通高級中學課程綱要》之必修科目「數學」課程綱要（以下簡稱普通高中數學課綱）或是十二年國教數學課綱，都主張：

直線的型式主要談點斜式，其他型式如斜截式、兩點式等不需另立名稱，可在應用時推導。不要讓學生背太多公式，而是要讓他們多練習推演，在反覆推演的練習中，自然會熟悉斜截式與兩點式。（普通高中數學課綱，2013，頁 25）

G-10-2 直線方程式：斜率，其絕對值的意義，點斜式，點與直線之平移，平行線、垂直線的方程式。點到直線的距離，平行線的距離、二元一次不等式。（十二年國教數學課綱，2018，頁 45）

傳統的教學方式，不但教導直線的點斜式，還教導兩點式、斜截式、截距式等。表面上看起來，更多的公式似乎用起來更方便，但仔細分析，這些公式基本上是一樣的精神，只要會了點斜式，其他式子就沒有實際

的需要，因為他們並未提供比點斜式更方便的效果。而多學習這些公式的代價卻是，消耗太多不必要的精力去記憶它們。

學習數學之道在於以簡馭繁，切忌化簡為繁。研究直線方程式，更簡單的做法也許根本不需要記任何公式，重點只是「直線有唯一斜率」。如果知道直線上一點  $(a, b)$  及直線斜率  $m$ ，則直線上一般點  $(x, y)$  與已知點  $(a, b)$  寫出斜率  $(y-b)/(x-a)$ ，這個斜率應該是  $m$ ，就得到直線方程式  $(y-b)/(x-a)=m$ ，也可整理為  $y=m(x-a)+b$ 。

回應第一節的論述，在學習主要的基本概念之後，要訓學生練流暢操作符號運算的能力，這樣才能看出原理與變形之間的關係，避免強記許多變形公式的浪費。

## 二、學習對數只需充分瞭解常用對數

普通高中數學課綱（頁 16）、十二年國教數學課綱（N-10-4、A-11A-4、F-11A-4、F-11B-2）主張「換底公式以換成 10 為底的對數為主，不宜牽涉太過技巧性與不實用的問題」、「純人工化指對數方程式與指對數不等式問題則不宜過度延伸」、「對數定律僅介紹  $\log(xy)=\log x+\log y$ ， $\log(x/y)=\log x-\log y$ ， $\log(x^\alpha)=\alpha \log x$ ，不要列出太多的延伸公式」。傳統的教學涉及的對數公式可以多到十多條，許多教科書／講義，不但是教材的內容，就連評量的題目都出現各種底的對數，增加學生許多不必要的負擔，但對於學習目標卻幫忙不大。

學數學應當瞭解數學史。數學史顯示，對數的主要用途是要把大數化小以利計算，在這樣的目標下，只需要學習以 10 為底的常用對數，這是 Henry Briggs（引自 Merzbach & Boyer, 2011）改進 John Napier 的想法提出來的。Pierre-Simon Laplace 在《天體力學》（*Mécanique Céleste*）中讚美說：「對數，可以縮短計算時間，在實效上等於把天文學家的壽命延長了許多倍。」考慮各種底的指數和對數始於 Euler，他在處理指數／對數的微分時，推導出指數函數  $a^x$  的微分是  $c_a a^x$ ，其中  $c_a$

是一個和  $a$  有關的常數，特別是  $c_e=1$ ，而以  $e$  為底的自然對數  $\ln x$  的微分就等於  $1/x$ 。

為了利用微積分處理問題，只需要考慮自然指數／對數。而不涉及微積分的應用時，就只需要考慮以 10 為底的常用對數就夠了。太多各種底的對數公式的學習，以及由此衍伸出來的各種考題都是不必要的。

### 三、學習排列組合的重點在組合數

高中排列組合的定位是為處理生活中常見的計數問題，並作為學習古典機率的基礎。十二年國教數學課綱（2018，頁 47，D-10-3）旨在學習基礎的「加法原理、乘法原理、直線排列與組合」，正是針對這種需求而設計。

反觀歷年數學課程標準／綱要，在這一主題的學習內容都只簡單的列出排列、組合，唯獨普通高中數學課綱特別加註，細項包含直線排類、重複排列、組合、重複組合，但不包含環狀排列。早期的課綱雖然只簡單列出排列、組合，但是後續的教學卻包山包海地講授重複排列、重複組合、環狀排列，以及許多刁鑽古怪的難題，有些題型的情境不合常理，有些則是用到太多觀念，都不是基礎素養所需。這樣的學習內容，讓大部分的學生視為畏途，普通高中數學課綱雖然刻意排除環狀排列，但還是未做到根本的定位。

不只是在日常生活中，縱使是在大學時期、甚至研究階段，排列組合真正需要的核心內容也都只有 D-10-3 的內容。高中時期的學習應以此為度，避免過度學習。

### 四、三角比的學習應盡量減少公式的記憶

三角比的學習過去包含  $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ 、 $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$  六個比，相關的公式多如牛毛，學習起來十分辛苦。其實  $\cot$ 、 $\sec$ 、 $\csc$  只是  $\tan$ 、 $\cos$ 、 $\sin$  的倒數，不必刻意學習。而許多公式也都可以在使用時，直接由少數的幾個公式取代，避免繁重的公式記憶。在衆多公式裡面，比較需要記住的有複角公式、正弦定理、餘弦定理。

至於像半角公式這樣的式子，縱使不記得，也可以利用複角公式解題。例如，要由  $\cos 30^\circ$  求  $\sin 15^\circ$ ，如果不記得半角公式，只要利用複角公式，就有

$$\sqrt{3}/2 = \cos 30^\circ = \cos(2 \times 15^\circ) = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ,$$

移項後開方就解出  $\sin 15^\circ$ 。其實，半角公式的需求大部分是分析證明上的需要，真正要求某個三角比的值，只要按一下計算機就可以得到，並不需要化為兩倍角的表示。

事實上，大部分的題目，只要真正瞭解其真意，都可以只用最基本的概念來解答。舉例說明：「求滿足  $\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$  及  $\overline{BC}=10$  的三角形  $ABC$  最大可能面積。」早期常見的一種解法是利用海龍公式，設  $\overline{AB}=4x$ 、 $\overline{AC}=6x$ ，則由海龍公式就能得到面積是  $5\sqrt{-x^4+26x^2-25}$ ，利用  $(y=x^2)$  二次式的極值就可得到答案。如果不會海龍公式，也可以用餘弦定理加上面積公式，得到完全一樣的式子，這是因為海龍公式是由餘弦定理加上面積公式推導出來。進一步說，如果你還是國中生，並不會三角比，那也沒關係，利用畢氏定理就可以推出完全一樣的式子，這是因為餘弦定理是由畢氏定理推導出來的。

總結來說，瞭解問題的本質，就可以用最基本的方法完美解題。再度回歸到觀念紮實、技能流暢，勝過強記許多公式。

## 參、數學教學應培養學生正確使用工具的素養

林福來教授領銜的「數學領域綱要之前導研究」（林福來等人，2013）指出，各國的課程綱要均強調運算的概念性瞭解。這是因為程序性知識的規則時常變來變去，對學生而言沒有感覺，也容易背錯或錯用。若數學強調概念性的瞭解，學生可整合這些程序性知識，瞭解其由來，將使其變得更有意義。最後他們建議：「四則運算的概念性理解，應該利用較小位數運算，在一步驟問題中進行。較大位數的運算，可以允許使用計算機來計算，並能進行合理性的判斷」。

其實，計算機融入教學的建議，由 1993 年《國民小學數學課程標準》起，各版本國、高中數學課程綱要的實施要點裡，也都有使用計算機的建議。但是，20 幾年下來，計算機教學在我國的中小學只有極少數零星執行。究其原因，教科書和教師無暇思考執行細節，再加上全國性大考禁止學生使用計算機，更大大削弱了師生嘗試計算機融入教學的念頭。有鑑於此，十二年國教數學課綱在學習內容的條文中，明列教導計算機按鍵；在實施要點也加強說明教師、學生、教科書、評量使用計算機的注意事項。

計算工具並不侷限在計算機，一開始提倡只是因為其價錢是所有學生負擔得起，而對於數學課程綱要所要求的大部分計算都已經夠用。當學生逐漸習慣使用計算機之後，教師可適時引入更高階的計算工具，如電腦的各種計算軟體 Excel、Desmos、GeoGebra。

## 一、數學為主、計算工具為輔

使用工具是人類異於其他生物的重要能力。配合數學理論使用計算工具，讓數學發揮更強大的功能。工具不分貴賤，只有正確使用才能達到效用。在數學工具的教學裡，有如下二個根本的理念，是使用工具的正確態度。（一）解題時，只有用盡數學推理，剩下繁雜的計算時，才是計算機進場的時機。（二）計算機的計算結果有一定的誤差，宜用理論推導，減少計算次數，減低誤差的累積。

舉例來說，要計算  $1+2+3+\cdots+496$  的值，不是拿了計算機就從 1 開始，一個一個加，加了 495 次之後才把答案算出來；正確的方法還是要學會等差級數求和的公式，知道答案是  $496(496+1)/2$ ，接著若有需要再用計算機協助求解。

再以計算梅森質數  $2^n-1$  為例。對於比較小的  $2^{31}-1$ ，計算機可以直接算出 2147483647。如果要算略大的  $2^{127}-1$ ，計算機可以得到近似值  $1.7014118 \times 10^{38}$ 。但如果要算特別大的  $2^{82589933}-1$ ，按計算機按鍵會得到錯誤訊息，因為這個數已經超過計算機的最大容量  $10^{100}$ ；這時候，數學

就要進場。利用  $2=10\log^2$  及指數律，得知

$$2^{82589933} - 1 \approx (10^{\log 2})^{82589933} = 10^{82589933 \log 2} \approx 10^{24862047.17} = 10^{0.17} \times 10^{24862047} ,$$

再用計算機算出  $10^{0.17} \approx 1.5$ 。指數律在此扮演重要的步驟。

再舉一個例子。芮氏規模  $M$  的地震所釋放出來的能量  $E=10^{11.8+1.5M}$ 。要計算規模為 9.1 的日本大地震所釋放的能量  $E_1$ ，是規模為 7.3 的集集大地震所釋放的能量  $E_2$  的幾倍。如果先用公式分別求出  $E_1$  和  $E_2$ ，再求其比，不但增加計算量，也因為多次計算累積較多的誤差。比較好的方法還是先利用指數律，將比值化簡到最後才計算其值：

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{10^{11.8+1.5 \times 9.1}}{10^{11.8+1.5 \times 7.3}} = 10^{(11.8+1.5 \times 9.1) - (11.8+1.5 \times 7.3)} = 10^{1.5 \times (9.1 - 7.3)} = 10^{1.5 \times 1.8} \approx 501 .$$

在數學教學中，數學理論永遠優先於工具。要注意的是「數學老師的本業是教導數學理論，不可被工具喧賓奪主。」

## 二、教學宜隨計算工具做適當調整

最後討論有計算工具可用之後，教學要隨之適當調整。

以計算三角比時轉換象限的公式為例。早期的學習包含許多公式，把  $\sin(\pm\theta)$ ,  $\sin(90^\circ \pm \theta)$ ,  $\sin(180^\circ \pm \theta)$ ,  $\sin(270^\circ \pm \theta)$ ,  $\cos(\pm\theta)$ ,  $\cos(90^\circ \pm \theta)$ ,  $\cos(1800^\circ \pm \theta)$ ,  $\cos(2700^\circ \pm \theta)$  等轉換為  $\pm\sin\theta$ ,  $\pm\cos\theta$ 。仔細觀察，其中只有少數幾條公式以後真正常常用到，其他的大部分用不到。問題是，為何以前需要學習這許多轉換公式？一個可能的原因是，早期求一般三角比時是靠三角函數值表，而一般的表都只有第一象限角的三角函數值，因此將非第一象限的三角比轉以第一象限的三角比表示，確實有利於查表來求值。可是如今利用計算機，不管是哪一種角度，計算機都能快速地呈現其三角比值，於是大大減低了這些轉換公式的需要，因此我們應該將這方面的教學減到最低。

其他如實務應用的教學時，可以採用真實的數據；數據分析的教學時，可以採用更大量的數據；函數圖形的教學時，可以用 Desmos 等軟體協助觀察圖形長相。計算工具是用來協助數學的，兩者適當結合，帶給人類最有用的幫忙。這是學生們要學到的理念。

## 參考文獻

- 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域（2018）。
- [*Curriculum guidelines of 12-year basic education: Mathematics domain for elementary, junior high school and upper secondary school education.* (2018).]
- 十二年國民基本教育課程綱要總綱（2014）。
- [*Curriculum guidelines of 12-year basic education: General guidelines.* (2014).]
- 李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2014）。教育部提升國民素養實施方案——數學素養研究計畫：數學素養向度建議文。教育部。<https://tame.tw/old/forum.php?mod=attachment&aid=MzQzfDFhMGVINDQ2fDE3NTMwODM0MzN8MHwxNzY%03D>
- [Lee, K.-W., Huang, W.-C., Yang, T.-C., & Liu, B.-H. (2014). *Recommended dimensions of mathematical literacy: A research report under the Ministry of Education's program for enhancing national literacy.* Ministry of Education. <https://tame.tw/old/forum.php?mod=attachment&aid=MzQzfDFhMGVINDQ2fDE3NTMwODM0MzN8MHwxNzY%03D>]
- 林福來、單維彰、李源順、鄭章華（2013）。十二年國民基本教育數學領域綱要內容之前導研究報告（計畫編號：NAER-102-06-A-1-02-03-1-12）。國家教育研究院。
- [Lin, F.-L., Shan, W.-C., Lee, Y.-S., & Cheng, C.-H. (2013). *Preliminary study report on the mathematics curriculum content in the 12-year basic education program* (Project No. NAER-102-06-A-1-02-03-1-12). National Academy for Educational Research.]
- 高級中學課程標準（1983）。
- [*Curriculum standards in senior high schools.* (1983).]
- 國民小學課程標準（1993）。
- [*Curriculum standards in elementary schools.* (1993).]
- 單維彰（2018）。中學數學教育的半世紀回顧及其啓示。教育研究月刊，294，4-18。
- [Shan, W.-C. (2018). A reflection on the secondary math education for the last half-century. *Journal of Educational Research Monthly*, 294, 4-18.]
- 普通高級中學課程綱要（2013）。
- [*Curriculum guidelines in senior high schools.* (2013).]
- Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A history of mathematics* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

