教科書研究
第十八卷 第二期（2025 年 8 月），1-43
doi: 10.6481/JTR.202508_18(2).01

在 AI 時代再思考數學課程——落實人才培育的建議

于靖　丁志堅

從人才培育的觀點檢視數學課程綱要內容，並提出如何藉由數學課程規劃來更有效的培育未來人才。對比臺灣現行十二年國教數學課程綱要，2010年美國數學課程綱要，以及美國大學先修課程的課程綱要，在數學教育中的目標與核心能力要求及差異。我們指出數學課程內容與資訊科技課程內容的關鍵對應，也著眼各種教學工具的使用以及其可能對於數學課程的影響。我們特別介紹 AI 機器學習分類模型例子，呈現其背後應用到的基礎數學。

關鍵詞：課綱、機器學習、運算思維、函式、微積分

收件：2024年12月3日；修改：2025年4月15日；接受：2025年7月10日

于靖，中央研究院院士、國立清華大學數學系榮譽講座教授，E-mail: yu@math.ntu.edu.tw
丁志堅，國立清華大學環境與文化資源學系副教授

Journal of Textbook Research
Vol. 18, No. 2 (August, 2025), 1-43
doi: 10.6481/JTR.202508_18(2).01

Reflections on the Structure of Mathematics Courses in the Era of Artificial Intelligence

Jing Yu   Tsu-Jen Ding

From the perspective of mathematics education, we analyzed curriculum guidelines and revealed how effective course planning can better serve the next generation of students. We compared Taiwans current 108 mathematics curriculum guidelines with the 2010 US Common Core State Standards and the Advanced Placement curriculum framework in terms of factors such as objectives and core competencies. The findings highlight the correspondence between the mathematics and information science curricula. Furthermore, the article sheds light on the use of various teaching tools and their effects on mathematics education. Specific examples of machine learning classification models are presented to illustrate the foundational mathematics involved in their implementation.

Keywords: Curriculum Standards, machine learning, computational thinking, mathematical function, mathematical calculus

Received: December 3, 2024; Revised: April 15, 2025; Accepted: July 10, 2025

Jing Yu, Academician, Academia Sinica; Honorary Chair Professor, Department of Mathematics, National Tsing Hua University, E-mail: yu@math.ntu.edu.tw
Tsu-Jen Ding, Associate Professor, Department of Environmental and Cultural Resources, National Tsing Hua University.

壹、前言

AI 科技的成熟發展大幅改變產業生態與大眾生活方式，世界先進國家均大量投入人工智慧（AI）發展，藉以掌握此發展的關鍵技術，提升國家競爭力。我國政府宣示 2017 年爲臺灣 AI 元年後，便推動 4 年期臺灣 AI 行動計畫（行政院科技會報辦公室，2018），導入資源，積極在大學端培育 AI 高階科研與實務應用人才，同時延攬海外 AI 菁英，讓臺灣在此智慧革命中取得機會與優勢，引領我國邁向數位經濟發展的新階段。

此一 AI 人培育的策略，在臺灣 AI 行動計畫 2.0（2023~2026 年）（行政院智慧國家推動小組，2023）有了更全盤的思考，積極採取向下紮根的布局策略，AI 行動計畫 2.0 從教育部與數位發展部的跨部會整合中，提供中小學學生更多學習 AI 基礎學理的機會，擴大培育規模，實踐人才優化與擴增。由於基礎數學能力緊扣著 AI 研究與應用者對於試圖理解模型、優化算法，以及進行資料分析與預測的能力，同時數學教育培養的邏輯推理與問題解決能力，爲 AI 技術創新的基礎，因此數學教育如何積極回應 AI 人才培育，或許才是 AI 發展的藍海策略。

在本文中，我們嘗試從人才培育的觀點，檢視當前教育體系中數學課程綱要的內容，並探討其與 AI 的關聯性，以及如何透過數學課程規劃來更有效地培育未來人才。首先，我們針對臺灣現行的《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域》（十二年國教數學課綱，2018）進行剖析，並與 2010 年美國數學課程綱要（Common core state standards for mathematics），以及美國大學先修課程（Advanced Placement, AP）的課程綱要進行比對（詳網址：https://ap.collegeboard.org/），以理解不同教育體系在數學教育中的目標、核心能力要求及差異。隨著 AI 技術逐漸融入各行各業，數學教育與課程設計也必須適度調整，以確保學生具備足夠的數學素養，特別是

面對 AI 世代時所需的應用基礎數學能力。接著，本文將著重論述數學課程應如何涵蓋人工智慧所需的基礎數學、資料分析概念以及相關邏輯訓練，使學生在未來能成爲兼具技術知識與社會責任的 AI 世代公民。我們從 4 個面向來思考 AI 世代下的數學課程。其一，基於美國近年來在 AI 發展上的領先地位，我們探討其數學教育有何可供借鏡之處，並指出數學課程內容與資訊科技課程內容之間的關鍵對應。其二，聚焦於各種教學工具的使用方式，以及它們可能對數學課程所產生的影響。其三，我們發現現行高中課程綱要與大學人才需求仍存在落差，遂深入探討《十二年國民基本教育課程綱要》（以下簡稱十二年國教課綱）與美國現行進階課程 AP 的課程綱要之間的差異。其四，我們特別介紹並分析幾個 AI 機器學習的分類模型例子，嘗試呈現其背後所涉及的基礎數學。在文章最後，我們基於上述討論，提出一些結合數學教育與資訊科學教育的可行建議，並著眼於高中數學課程與大學課程之間的銜接與落差，期能爲未來人才培育提供參考方向。

貳、AI 時代從美國數學課程綱要思考十二年國教數學課綱

美國近年來在 AI 發展上處於領導地位，其數學教育中的一些實踐和策略值得借鑒。另一方面，AI 的基礎在於透過大量數據的蒐集、數位化，並使用基本的數學工具來進行處理與分析。爲了進一步探討數學教育如何回應人工智慧的發展，我們選取臺灣《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——科技領域》（十二年國教科技課綱，2018）作爲比較參考。雖然十二年國教科技課綱強調資料探勘與機器學習等具體技能，但我們認爲，這些應用的核心仍然依賴於數學中的運算思維和基礎工具。因此，本研究的重點在於探討數學課綱應提供那些學習內容，以有效橋接 AI 相關領域的學習。基於此背景，我們從以下 2 個面向檢視現行的十二年國教數學課綱，其一是從運算思維

的角度回應十二年國教科技課綱，其二則是對比美國數學課程綱要。

十二年國教科技課綱（2018）包含資訊科技與生活科技 2 個部分。科技課綱旨在培養學生的科技素養，目的是透過科技相關工具來培養學生動手實作、設計與創造科技工具及資訊系統的知能。同時，資訊科技課程綱要也希望涵育學生探索、創造性思考、邏輯與運算思維、批判性思考、問題解決等高層次思考的能力。所謂的運算思維，是指透過電腦科技相關知能的學習，培養邏輯思考與系統化思考，而數學則是發展學生運算思維的最重要學科之一。此外，普通高中的資訊科技的學習內容中，如「資 D-V-2 資料探勘與機器學習的基本概念」（頁 11），其學習表現的成效也與數學領域的學習成效密不可分（如函數、微積分、線性代數）。

另一方面，對比美國數學課程綱要可以發現，儘管美國與臺灣的學制略有不同（美國高中爲 9~12 年級，國中爲 6~8 年級），其面對 AI 世代的數學課程內容仍有許多值得臺灣借鑒之處。美國數學課綱強調數學實作與素養（mathematical practice and proficiency）的培養，特別是在數學實作方面著重數學過程的流暢性與熟練度，涵蓋提出策略的能力（包括程式設計的應用）、辨識與運用數學推理的能力，以及對數學操作精準程度的感知與掌握。我們認爲，在 AI 世代興起之際，數學教學應把握這一契機，適時引導學生從自然語言描述的情境，轉化爲較高層次的數學表達，進而透過符號來表示與操作數學物件，這也是抽象思維的起點。在教學實作中，可以聚焦於具體呈現所有基本的數學物件，即便對這些物件的不同表徵（representations）的理解需要學生具備初階的抽象能力。然而，數學的不同次領域（如幾何、代數）中的數學物件皆可在電腦環境中呈現，而這些物件之間的邏輯關係與系統性思考，則是培養學生運算思維的重要切入點。適當運用科技工具（如 GeoGebra、Scratch）進行實作，不僅能提升學生對數學物件的理解，也有助於運算思維的發展，進而培養學生適應 AI 時代所需的能力。

美國數學課程綱要提到運算思維（computational thinking）的重

要性（Porter et al., 2011），其中對「計算演算法」與「計算策略」作出清楚區分：計算演算法是一組適用於某類問題的預先定義步驟，只要正確執行，每次都能得出正確結果；而計算策略則是為特定問題所選擇的有目的操作，未必有固定順序，目的在於將原問題轉化為另一個較易解決的形式。這樣的區分顯示出美國課綱對靈活運用與問題轉化能力的重視，強調運算思維在數學學習中的核心角色，這部分正是目前十二年國教數學課綱中相對較少涉及的內容。然而，十二年國教科技課綱已明確指出「運算思維」作為核心素養的重要性。因此，我們建議，在符合AI 時代需求的數學課程綱要中，也應進一步強調「運算思維」的培養。細緻地對應十二年國教數學課綱與十二年國教科技課綱可以發現，數學課程中的學習內容完全可以呼應十二年國教科技課綱所欲培養的核心素養。例如，運用程式設計來模擬數學概念，不僅能幫助學生加深對數學基本概念的理解，也能提升他們的實際操作能力。此外，這種融合並不會影響高中與大學的入學考試，因此從基礎教育層面整合數學與資訊科學的教學，是切實可行的策略。此外，美國課程綱要在教學設計上亦有值得借鑒之處。例如，美國在 6 年級就開始引入一些數學基本概念，如變數與代數式，而這些內容在十二年國教數學課綱中則安排在 7 年級。更進一步，美國 6 年級數學課綱還強調統計與機率的基本概念。這些基本概念的儘早引入，不僅能幫助學生打下紮實的數學基礎，更能有效導引學生面向 AI 時代的學習需求。特別是在函數的教學方面，美國課綱清楚指出應在 8 年級教授，讓學生理解「每一個輸入（input）對應一個輸出（output）」的基本概念。函數在現代應用中早已不只是抽象的數學概念，而是涉及數據分析、程式設計及 AI 模型建構的基石。因此，儘早將函數概念融入教學非顯得常重要。如果等到高中 3 年級才教授這一概念，對學生的學習進程而言，無疑為時已晚。

從語言的觀點來看，數學語言與資訊科學語言的發展具有高度的同構性與相互助益之處。學生的語言學習經歷可以視為一個從自然語言逐步過渡到符號語言、人工語言（artificial language, AL）的過程。在數學

領域，這一過程從學習基於自然語言的數字與基本符號開始，再逐步引入文字符號來代表未知數。進入國中教育階段，文字符號進一步被視爲變數，進入更爲抽象的數學語言系統。而資訊科學領域則引入程式語言，學生逐步學習如何使用這些人工語言與電腦進行交流。從語言結構的角度看，自然語言、數學語言以及程式語言（如 Python）均屬於「高階語言」。這些語言經過高度「封裝」，以人類易於理解的文字表達，並建立在日常語言的基礎之上，因此具有較高的可讀性。這樣的設計使得對電腦理解較淺的人也能大致掌握其內容。然而，要眞正理解這些語言的描述對象，學生需要對它們所指涉的基本概念有一定程度的熟悉與掌握。因此，在數學教學中，語言學習與基本數學概念的掌握應同步進行。

語言學習的起點自然是學生的母語。然而，數學與資訊科學中的語言並非天然屬於自然語言，而是經過翻譯與轉化後才被整合進學生的學習過程。例如，數學教學的早期階段常以自然語言描述問題的形式導入，這種方法在國小階段尤爲有效。但隨著學習內容的逐步深入，數學概念的抽象性逐漸增強，學生需要逐步適應數學世界中的語言規則與邏輯陳述，而不僅僅依賴自然語言的直觀理解。在此過程中，雙語化教學可發揮重要作用。一方面，雙語化教學能幫助學生更快地適應數學語言與資訊科學語言的特性；另一方面，在資訊科學領域，由於早期電腦產業發展主要以英語爲基礎，程式語言多以英語爲藍本。因此，在資訊教育中，雙語化幾乎是一種必然選擇，能幫助學生有效掌握資訊科學中的人工語言。總之，數學與資訊科學語言的學習是從自然語言逐步過渡到符號化、人工語言的過程。在這一過程中，學生需要逐步接受這些語言所描述的抽象事實與邏輯。同時，雙語化教學在數學與資訊科學領域的語言轉化中具有顯著優勢，不僅能提升學生的學習效果，還能更加呼應全球化背景下的教育需求。

以下以「算則，演算法，與近似値」及「集合，函數（函式），三角函數」兩個例子來闡述基礎數學概念，涉及資訊素養的面向當然也一併考慮。

一、算則，演算法，與近似值

（一）算則

算則（計算演算法）在資訊科技課程綱要中被稱為「演算法」（algorithm），其名稱源自波斯學者 Al-Khwarizmi（西元 780~850），是數學中最基本且重要的概念之一。從國小階段的算術運算操作開始，算則便成為數學課程的一部分，而這一概念在十二年國教科技課綱中則被稱為「運算思維」，並且是國中 7 年級資訊科技課程綱要的核心素養之一。同樣地，在國中數學領域，我們建議也應從「運算思維」的角度，更具體地詮釋學習內容，以與十二年國教科技課綱的教學相呼應。例如，數學中的整數與分數加、減、乘、除運算應被視為基本的「演算法」。在教學中，GeoGebra 等軟體的電腦代數系統（computer algebra system, CAS）計算器非常適合用於這一層面的數學教學，能幫助學生直觀地理解運算背後的邏輯。

在國中階段，從除法算則延伸到歐幾里德輾轉相除法，可以作為展示「演算法」魅力的亮點範例。國中數學課綱中還涉及「質數判別」與「質因數分解」問題，這些都是演算法研究的經典案例。例如，質數判別經歷了兩千年的研究，直到 21 世紀初才發展出接近理想的演算法（AKS 判別法）；而質因數分解則與現代密碼學密切相關，是過去半個世紀以來資訊安全的核心基礎之一。這些內容不僅是數學課程的重要組成部分，更是學生瞭解數學應用與科學價值的關鍵切入點。數學課程綱要不應僅僅強調算則的推導與後續運算，更應著重於幫助學生認識不同算則的特點與應用情境，並培養其判斷不同演算法優劣的能力。由於算則往往涉及複雜的運算過程，我們建議應利用電腦來執行繁重的計算，使學生能專注於理解演算法的直觀原理與結構，而非耗費精力於繁瑣的計算步驟。這樣的教學策略不僅能讓學生更深刻地理解數學的本質，也能培養其應用數學解決實際問題的能力。

輾轉相除法是一種經典且完美的順序演算法（sequential

algorithm），其簡潔、高效的特性使其成爲數學與資訊科學中不可或缺的基礎方法之一。在現代技術的支持下，無論是具備 CAS 計算器功能的手機還是平板電腦，都能輕鬆執行輾轉相除法，僅需幾次按鍵操作即可完成計算。此外，在資訊科學領域中，輾轉相除法也是最適合以遞迴演算法實現的數學運算之一，這種高度藝術性的算則，能以最精簡的程式碼，表達複雜的計算過程。以如下的 Python 程式碼爲例，透過函數的自我呼叫方式，僅五行程式碼即可算出 252 和 105 的最大公因數爲 21。

```
def gcd_recursive(a, b):
   if b == 0:  # 終止條件
      return a
  else:
      return gcd_recursive(b, a % b)
print(gcd_recursive(252, 105))  # 輸出 21
```

然而，令人遺憾的是，根據《十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域課程手冊》（國家教育研究院，2020）（以下簡稱十二年國教數學課程手冊），N-7-2 條目的說明中明確將輾轉相除法列爲「不介紹」的內容，這在教學設計上無疑是一大缺憾。輾轉相除法是數學史上少數經過完整驗證且具備優雅數學結構的演算法之一。利用這一方法計算最大公因數（GCD）的效率遠超其他方法。因此，我們應該向學生介紹其卓越之處，並說明歷史上最早的演算解法（如篩法）和分解整數的方法雖然具有開創性意義，但始終未能滿足人類對高效性的追求。科學研究的核心在於不斷探索更省時、更省力、更經濟的方法，而這正是理解「好」演算法的重要切入點。

在此過程中，學生可以接觸到演算法「複雜度」（complexity）的概念，這是現代理論資訊科學的基石，而輾轉相除法則是一個完美的實例。19 世紀法國數學家 Lamé 的研究將這一演算法推向理論高峰，他證明：對於兩個正整數，若將其表示爲 10 進位形式，使用歐幾里德方法

計算其最大公因數所需的除法次數，不會超過兩個整數中較大數的 10 進位展開位數的 5 倍。這個結果不僅顯示出輾轉相除法的高效性，也為後來複雜度理論的發展奠定了基礎。在數學教學中，向學生介紹輾轉相除法的歷史背景、應用價值及其理論意義，有助於他們理解何謂「好」的演算法，此舉不僅能拓展學生的視野，還能幫助他們建立運算思維和邏輯推理能力的深厚基礎。忽視這樣一個經典且具教育價值的內容，無疑會讓學生錯過接觸數學與資訊科學核心理念的寶貴機會。因此，將輾轉相除法納入課程內容，應是未來教學設計的重要改進方向之一。

（二）運算思維

我們建議在十二年國教數學課綱中應明確界定「運算思維」的概念，並在教學中強調其應用價值。國中資訊科技課程綱要已引入順序與遞迴思維，而國中 8 年級數學教科書中的費氏（Fibonacci）數列，作為最簡單的遞迴數列，正是啓發學生理解遞迴思想的理想切入點。同時，這也為進一步探索「輾轉相除法」的演算法「複雜度」提供了理論基礎。19 世紀，Lamé 對輾轉相除法進行了深入研究，觀察到在使用歐幾里德方法計算兩個正整數 a 和 b 的最大公因數（其中 $a > b$）時，最繁複的情況出現在 a 和 b 恰為費氏數列中相鄰的兩項。此時，所需的除法次數正好等於 b 的 10 進位展開位數的 5 倍。這一發現不僅展示了費氏數列與輾轉相除法的緊密聯繫，也讓學生得以透過具體的數學例子理解演算法複雜度的概念。輾轉相除法不僅是演算法中順序邏輯的經典案例，也是探索遞迴思維的重要窗口。將其引入課堂，能夠幫助學生從實際問題出發，理解數學與資訊科學的交叉應用。同時，通過結合費氏數列與輾轉相除法的複雜度分析，學生能夠加深對數列、遞迴以及演算法效率的認識，進一步培養批判性思維與問題解決能力。

在正整數平方根的表達方式上，Lamé 在探索「輾轉相除法」的研究中運用了數學歸納法，並將其與費氏數列及黃金分割數 φ 建立了緊密的連結。費氏數列作為最簡單的遞迴數列，揭示了遞迴這一基本數學概

念的重要性。如同$\sqrt{2}$，黃金分割數 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 = [1,1,1,1,1,\ldots\ldots]$ 具有最簡單且優美的循環連分數展開形式。這爲學生接觸連分數（尤其是循環連分數）提供了一個直觀的啓蒙例子。在幾何學中，正整數平方根（如$\sqrt{5}$）最早源於畢氏定理。通過數學教學，可以讓不同的數學概念在相互連結中得到深化。例如，從幾何到數學歸納法，再到連分數展開，這些概念構成了一個豐富的數學學習框架，爲學生理解數學的多面性奠定基礎。然而，教學的目標並不是期望學生在短時間內掌握所有的概念，而是引導他們觀察數學現象的多樣性，理解各種概念之間的演化與關聯，並在長時間內逐步內化這些知識。數學的魅力之一在於，可以藉由不同的數學途徑來達成多種表徵形式。對於學生而言，重點不在於完全掌握每一個數學方法途徑，而在於欣賞與理解數學途徑的多樣性，並培養觀察力與洞察力。

（三）近似值

圓周率 π 是學生首次接觸到誤差與近似值的概念，通常是在國小 6 年級學習圓的不變量——圓周率 π。這是一個極其複雜且難以估計的無理數，並且不是任何整係數方程式的根（由 F. von Lindemann 所證明）。如何計算圓周率、近似其值，並控制誤差與近似速度，是數學中極具意義的問題。從古希臘的阿基米德到現代，數學家不斷努力去探索和理解這一重要數學常數。阿基米德、劉輝、祖沖之等數學家利用畢氏定理與三角幾何，透過內接正多邊形（國中的數學方法）計算圓周率，得到了例如圓周率 $\pi < 22/7$，與圓周率 $\pi < 355/113$。這些分數（22/7 和 355/113）是對 π 的最佳有理近似，因爲它們在分母不大於 7 或 113 的所有有理數中提供了最精確的結果。經由圓周率的連分數展開，可以推導出這些結果，並解釋爲什麼 355/113 比 22/7 更接近圓周率 π 的精確值。到了 15 世紀，隨著文藝復興和印度數學家對無窮級數與無窮乘積的引入，圓周率的研究進入新的篇章。這些數學的突破，推動了三角學的發展，提供了更精緻的數學結構和更快速收斂的公式來計算圓周率。這一高潮延續到

Newton 和 Leibnitz 創立微積分的時代。到 18 世紀末，J. H. Lambert 證明了圓周率 π 是無理數。而到 19 世紀，人們已經能夠手算超過 700 位小數，這充分展示了數學研究與圓周率近似問題的並進歷程，是高中數學中極具啓發性的故事。20 世紀對圓周率的研究更加精彩。100 年前，S. Ramanujan 利用算術幾何（modular function）提出了一個近似圓周率 π 的神奇公式，其每個級數項都能計算出額外 10 多位準確的小數。到了 1989 年，隨著電腦技術的發展，Chudnovsky 兄弟利用更高效的演算法，已將 π 的計算精確到超過 10 億位。圓周率的歷史發展充分顯示出數學在精確性與計算效率上的不懈追求，並體現了數學、科學與資訊科學的共通目標 —— 更精確、更高效。數學課程應提供相關的學習機會，讓學生瞭解這些故事，體會數學研究的深度與歷史演進，並從中欣賞數學作爲一門科學如何持續推動技術與知識的進步。

關於縮小誤差，學生可透過計算二次方根及其近似值接觸到此概念。正整數的二次方根既可透過畢氏定理進行圖形化表示，也可以使用循環連分數展開來精確描述。在給定的誤差範圍內，二次方根的近似值是可完全控制的，這反映了實數作爲數學結構的基本特性。進入 AI 時代，各種數據可被高度技巧地數值化，並轉化爲在大數據集合上進行的「黑箱」操作。而近似二次方根則是一個最簡單且透明的「白箱」模型。機器學習演算法的核心目標，正是藉由數學運算不斷縮小輸出數據中的誤差，進而優化模型的表現。事實證明，機器學習的成功已遠遠超越科學家對其潛力的初步預測，從而揭開了 AI 時代的序幕。理解二次方根的近似與誤差控制，能幫助學生以更直觀的方式掌握數學中的誤差概念，並認識到這一基本思想如何啓發 AI 中的數學模型。這種學習方式不僅有助於鞏固數學基礎，也能讓學生想像數學如何應用於現代科技。

二、集合，函數（函式），三角函數

（一）數據集合

在 AI 的世界中，數據集合（datasets）無處不在，這是數學中集合

概念最直觀且實用的例子之一。因此，在國中數學課程中，引入集合的基本概念是必要且有益的。集合的教學不必一開始就從抽象的元素定義入手，而是可以透過具體的、生活化的情境，幫助學生理解物件聚集的概念，以及這一概念如何對應到資訊科學中的數據集合。學生面對一個集合，在傳統數學意識上固然可以是抽象的，而另一方面數據科學要探索的是集合元素間的相關與變異。在大數據時代，學生應認識到，未來他們將面對的是極爲龐大的數據集合，也就是包含大量元素的集合。這一認識是自然且順理成章的，因爲學生在國小階段已熟練掌握了大數的概念與運算。集合的操作在很大程度上依賴於變數的靈活運用，當變數表示某個固定集合中的元素，並在集合內「運行」時，數學的故事便正式展開。

（二）陣列與矩陣

在十二年國教科技課綱中，國中階段已引入陣列（array）概念，這是一種有限的、排序的（數據）集合。國小數學領域也已經開始涉及數據科學的基礎內容，其中出現的一維和二維表格就是陣列的早期形式。當這些陣列進一步數值化，便可與高中數學中的向量概念相銜接，因爲經過數值化後，可以對所有條目執行基本運算。在 AI 中，陣列和向量的應用非常廣泛，例如，大型語言模型（LLM）透過詞嵌入（word embedding）技術，將每個詞表示爲高維空間中的坐標向量，這些向量的相對位置可反映詞在語境中的微妙差異。相似詞的向量在空間中相距較近，而向量內積和餘弦三角函數則用於計算詞間的相似性。基於這種基本的空間幾何運算，電腦得以解釋、操縱並模擬理解人類語言。爲讓學生及早瞭解陣列的應用，數學課程應考慮如何將陣列的概念融入教學中，而無需借助高階數學內容。例如，陣列可以用生活化的數據表格或簡單的排序問題來引入，幫助學生建立對陣列作爲數據集合的基本認知。

矩陣是一種特殊的陣列，數據科學中的二維表格可以自然地轉化爲數學中的二維陣列。如果條目直接以數值表示，這些陣列就成爲高中數學中可以運算操作的矩陣。例如，$m \times n$ 階的陣列可表示爲 $m \times n$ 階

的矩陣。在機器學習中，處理數據往往需要操作大尺寸矩陣，而對於現代學生而言，這些運算可以輕鬆交給電腦處理。另一方面，矩陣運算（特別是乘法）的計算複雜度會隨矩陣尺寸快速增長，因此，開發高效的矩陣運算演算法成爲過去半個世紀的重要研究課題。在高中數學中，雖然行列式的教學內容通常只要求學生手算 2 階或 3 階方陣，但學生可以透過電腦操作來計算更高階的行列式，並從中認識其較複雜的數學結構。此外，學生還可以從三維空間中的數據陣列初步認識張量（tensor，即高維陣列）的概念，這也是數學應用到 AI 中不可或缺的基礎知識。

（三）函數／函式

在引入集合概念的同時，函數與關係自然隨之進入數學課程。根據美國 8 年級課綱，函數將定義域中的元素視爲「輸入」，而函數值則是「輸出」。這種定義方式直接連結到資訊科學與 AI 的發展，也讓學生更容易理解函數在現代應用中的核心意義。函數的教學不一定依賴運算能力，而是應側重於幫助學生建立對應關係的理解。數學課程中，函數的引入始於自變數與因變數的概念，並逐步在數的集合上定義變數。隨著學習的深入，學生從一次線性式拓展到多項式，進一步延伸到多變數多項式，並掌握多項式上的四則運算。多項式因其包含變數，允許代換運算（substitution）：將選定的數值代入多項式中的自變數會得到具體的數值；而將另一個代數式代入則會產生新的多項式。代換是一種基本且具體的操作，在數學中對應於函數的合成。而在資訊科學領域，函數（function）更精確地被翻譯爲「函式」，因爲函數的定義域不限於數的集合，而是可以應用於任意集合。「式」的涵義更廣，甚至可以作爲「黑箱」，將輸入元素送入黑箱後得到輸出，再將輸出作爲下一個黑箱的輸入，這正是函數合成的實質。

多項式是數學中的基本「白箱」模型，具備完全的透明性。然而在 AI 中，黑箱／白箱已成爲描述函數的慣用語言。例如，機器學習模型使用的複雜函數往往被視爲黑箱，這些函數的透明性與可解釋性常是

研究的重要課題。儘管如此，理解函數的輸入與輸出關係的意義才是關鍵。無論是 AI 模型中的黑箱函數，還是中學數學課程中的指數函數、對數函數或三角函數，學生的核心素養應在於能掌握這些函數的基本運作規則。

在十二年國教科技課綱，程式設計教學多以學生熟悉的生活或遊戲情境爲背景（如 MIT 媒體實驗室開發的 Scratch 3.0），這些例子中，函式（函數）通常是完全透明的「白箱」，小學生都能理解其運作方式。數學教學應該引導學生以操作數學物件爲目標，讓學習如同遊戲般有趣，並逐步引入運算思維，使他們體驗數學的功能性與應用性。函數作爲數學學習的一個關鍵，並不需要學生完全理解每個演算法的內部運作，但應使他們能夠理解不同函數的輸入與輸出所對應的意義。

AI 的機器學習模型是經由「訓練」大數據集合生成的「黑箱」程式。這些黑箱函數能夠識別模式（pattern）並處理新的數據，通過多次輸入與訓練，模型函數逐步改進，最終生成高效的程式。雖然可以討論這些模型的透明度（transparency），但由於這些黑箱中的複雜函數是透過機器逐步控制誤差建構而成，其運算效率無法完全用理論解釋。相比之下，中學數學中的白箱函數，例如，平方根函數、指數函數、對數函數或三角函數，具有完整的理論基礎和可解釋性。然而，AI 中的黑箱函數則更爲複雜，是科學家面臨的眞正挑戰，涉及高維數據和非線性模式的建模。這種差異更能說明數學在 AI 應用中的核心價值，數學教育的任務是幫助學生搭建從白箱到黑箱的認知橋梁，激發他們探索未知的興趣與能力。

（四）數值函數

在電腦或計算器的計算介面上操作基本數值函數時，所顯示的函數值都是近似值，並在給定的誤差範圍內呈現。藉助軟體和程式語言，這些近似值的精度可以進一步調整，誤差範圍得以縮小，使數值函數的實際應用更加廣泛。在中學數學課程中，數值函數的教學從一次、二次、

三次函數開始，逐步引導學生理解更高層次的函數概念。正實數的平方根函數是學生接觸到的最早可以藉助電腦或計算器實際觀察的數值函數。接著，課程引入固定有理指數的指數函數、固定無理指數的指數函數，再到以固定正實數爲底的指數函數及其反函數──對數函數。這些函數標誌著高中數學中數值函數教學的新階段，學生開始處理更複雜的函數和數值計算。這些數值函數的取值，例如 $2^{\sqrt{2}}$、$\log_{10}\sqrt{2}$，往往與圓周率 π 一樣，屬於超越數。超越數指的是那些既是無理數，又不滿足任何整係數代數方程的數，難以作精確估計。數學中所謂的基本函數，都是由中學課程的這些基本數值函數所組成，在機器學習領域，基本函數扮演著不可或缺的角色，例如，AI 中各種激活函數皆屬於基本函數。

（五）從數線到圓

在座標平面上，將 x- 軸上的數線繞至以原點（0,0）爲圓心、半徑爲 1 的圓周上，可形成一個無窮多圈的圓周結構。當 x 從 0 到 2π 繞行圓周一圈時，x- 軸上的數線被分割爲長度 2π 的區間，並以這些區間的方式在圓周上反覆呈現。這樣的映射使定義在圓周上的數值函數轉化爲定義在數線上的週期數值函數，其週期爲 2π，例如三角函數 Sine（正弦）與 Cosine（餘弦）。在這個幾何架構中，圓周上的每一個點都可以對應到一個「角」，這些函數的定義域也就自然成爲所有的「角」。從 0 到 2π 是角的弧度量範圍，而 x- 軸的整條數線圍繞到圓周上後，對應了廣義的弧度量值。圓周上的弧長與實數加法的結合，賦予了幾何意義：實數的加法運算可以對應到弧長的加法，進而對應到圓周上點所代表的角度的相加。

作爲數學中最經典的超越數之一，π 是不容易精確近似的實數。然而，在圓周上，與某些有理分割點（如 π、π/2、π/3、π/4、π/6 等）相關的三角函數值卻非常簡單。這些分點具有重要的幾何意義，使三角函數的學習變得更加直觀且易於理解。三角函數的歷史可以追溯到古希臘的三角測量，當時的數學家藉由相似直角三角形的性質，將三角比

（Sine、Cosine 等）定義爲角的數值函數，這些比值是不變的。19 世紀初，法國數學家 Fourier 發現，任何週期數值函數都可以利用 Sine 和 Cosine 的線性組合來近似表達，這一發現成爲科學與工程領域的重要基石。Fourier 級數的出現使得週期函數的分析成爲可能，也更加擴展了數學在物理學、電子工程等領域的應用。

（六）三角函數

利用計算器繪製三角函數圖形可以幫助學生觀察並理解函數的一些重要性質。然而，僅僅計算特殊角的近似值並沒有數學教學上的深度意義，因爲這樣的操作並不能增強學生對三角函數特殊值的理解與掌握。在實際應用中，當特殊角取爲 π 的有理倍數（即常見的度數如 $\pi/2$、$\pi/3$、$\pi/4$ 等）時，這些函數值往往是無理代數數，雖然沒有 π 那樣複雜，但仍屬於數學中代數數的範疇。如同$\sqrt{2}$，代數數是可以用其精確形式呈現的。然而，普通計算器的操作僅能顯示這些函數值的小數近似值。從三角函數在特殊角所取的近似值推算其精確的代數數值，是現代數論與計算代數研究中的重要課題之一。這一研究關聯到數的深層結構與計算的精確性。在電腦尚未誕生的時代，數學家千百年來依靠三角學與基本幾何方法，近似計算三角函數取值，並將其應用於航海導航與天文觀測等實際問題。現代科學工具中提供的三角表，是融合了從古至今的數學方法，再結合計算機技術而達到了更高的精度與效率。

（七）從畢達哥拉斯到尤拉

三角函數的發展故事連結了數學歷史中的重要主題，也貫穿了國小到國中數學的核心內容：從畢氏定理到座標平面，再到 π 與圓，構成了一個完整而豐富的數學圖景。數線的延伸讓數學家將整個座標平面的點與更廣義的數 —— 複數建立對應關係。複數平面的引入不僅是數學發展中的偉大一步，更具有深遠的幾何與代數意義。

在複數平面中，點 $z = (x, y)$ 表示成 $x+iy$，其中 i 是 -1 的選定平方根。x- 軸上的點對應實數，而 y- 軸上的點對應純虛數。半徑爲 1 的單

位圓，則是複數平面上絕對值 $|z| = 1$ 的點集合。在這個集合中，點 z 的 x- 座標即爲 $\cos\theta$ ，θ 是點 z 與正向 x- 軸所夾的廣義角，也稱爲複數 z 的輻角。取這些點 z 的 y- 座標就是 $\sin\theta$ 。複數 z 也就寫成了 $\cos\theta + i\ \sin\theta$ 。複數平面的引入具有深刻的幾何意義：複數的相乘對應於其輻角的相加，進一步自然導出了複數的極式表示。尤拉（Euler）在此基礎上，將指數函數拓展至複數平面，定義了一整個複數值解析函數，並讓其滿足所有國中學生熟悉的指數律，從而寫下了他著名的公式：$e^{\sqrt{-1}\theta} = \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ 。Sine 與 Cosine 函數的和差公式也很容易就從複指數律導出。這一公式不僅連結了指數函數與三角函數，還讓三角函數的和差公式成爲複指數律的直接推論。從這個角度看，複數平面上的指數函數與對數函數是整個從畢氏定理到三角函數故事的自然延續與壯麗落幕。這段數學旅程展示了數學素養的核心所在：從具體的幾何問題到抽象的代數結構，數學的發展始終在探索與連結中進行。對學生來說，理解這段數學歷程，不僅有助於鞏固基礎數學概念，更能啓發他們欣賞數學之美，以及數學在自然科學與現代應用中的深遠意義。這樣的學習過程，不僅是一場知識的積累，更是一場思維的洗禮。

參、工具的使用及素養

在 AI 世代，工具的使用變得尤爲重要，特別是與數學相關的工具。這些工具的背後往往蘊含著不同的數學性質、演算和操作規則。對這些工具的熟練掌握與深入理解，不僅能提升解決問題的效率，還能幫助使用者更加瞭解工具背後的數學原理與應用場景。因此，工具素養已成爲 AI 世代必備的重要素養之一。工具素養不僅包含熟悉操作這些工具，還需要具備辨析工具特性、選擇合適工具解決問題的能力，更進一步需要理解工具運行的數學邏輯與科學背景。工具包括傳統實體操作工具（如尺規）及科技輔助工具（如 GeoGebra、Excel 試算表、計算機、數學建模軟體、數據分析平臺等）。這些工具不僅能夠幫助學生

更直觀地理解抽象數學概念，還能增強他們對數據處理和模型建構的能力。更重要的是，數學課程綱要應該清楚說明各種不同工具如何輔助數學學習。透過這些工具應用，學生不僅能提升學習效率，也能培養與多元工具共存共學的能力，爲未來面對快速變遷的 AI 環境做好準備。同時，數學課程也應該明確將工具使用的能力納入課程目標，幫助學生在學習過程中掌握如何有效應用各種傳統數學及科技輔助學習相關工具，提升問題解決的效率與深度。在 Organisation for Economic Co-operation and Development（2025）對數學課程的重點討論裡，也特別提出 GeoGebra。

一、使用工具的素養

工具素養對於中小學生學習非母語語言有著重要的作用，而他們的起點就是學會使用電腦（平板或智慧型手機）鍵盤。藉由運用鍵盤上的數字、英文字母及幾個最基本的符號，學生開始學習基本的打字輸入操作。隨著這些基礎技能的掌握，變數概念便能在電腦視窗上具體呈現，爲數學學習提供直觀的支持。我們建議在教學中直接引入電腦，配合資訊科學領域課綱，實現數學教學與語言教學的同步進行。相較於電腦，普通計算器因缺乏文字輸入功能，並不適合作爲語言與數學教學的工具。使用工具的素養還包括熟練應用各類軟體的能力，而這需要長期的訓練與實踐。目前，電腦已經可以免費安裝功能遠超普通計算器的科學計算介面，用於多樣化的數學教學。例如，統計教學可以使用試算表（spreadsheet），而包含電腦代數系統 CAS 的計算器介面，則可以進行數值和符號計算。特別是，我們建議在國中 7 年級便引入免費的數學軟體 GeoGebra，它的科學計算介面不僅完整涵蓋上述所有教學工具，還能在智慧型手機上操作，適應不同的學習環境與需求。然而令人遺憾的是，十二年國教數學課程手冊僅介紹了計算器，未能充分考慮現代數學工具的多樣化應用。而美國 2010 年數學課綱則強調學生應學會使用各種適當的工具，從最簡單的工具到 CAS、試算表以及數學軟體，充分

體現了工具素養在數學教學中的價値。我們進一步認爲，工具素養的培養不應推遲到學生對數學概念完全掌握之後（如證明工具背後的數學原理）才開始。在 AI 時代，能夠評估並有效使用工具來解決實際問題，比單純證明數學內容更爲重要。這種實用性的技能，不僅能提升學生在學習中的靈活性與效率，更能幫助他們適應快速變化的科技環境與社會需求。

二、維基百科

學生在維基百科（https://zh.wikipedia.org/）等網頁上，可以接觸到大量淺顯易懂且層層深入的數學內容介紹，涵蓋了概念與應用之間的多層次連結。當學生在維基百科搜尋質數判別、因數分解或輾轉相除法的相關內容時，可以找到實際可執行的演算法，包括從僞代碼（pseudocode）到完整的程式碼，這些資料爲教學提供了極佳的參考資源。由於這些網頁大多以英語撰寫，推動雙語化的數學教學不僅可以提升學生的英語能力，還能鼓勵數學教師帶領學生進入維基百科這個豐富的學習資源庫，進一步結合資訊教育領域的教學目標。以國中 8 年級的數學教學內容爲例，像是二次方根與其近似値的學習，對比國內教科書與維基百科上的內容後可以發現，教科書的講解深度與廣度遠不及維基百科的詮釋。維基百科提供的內容可以一路連結到高中的數學教學，並爲資訊科學領域中的程式設計提供豐富的案例。特別是在計算二次方根的近似値方面，這是一個展示多種演算法的機會，從中可以引導學生理解各種不同的計算策略，這或許是中學數學與資訊教育領域最爲精彩的交叉點。相比目前數學教科書中僅使用計算器按鍵進行二次方根教學的方法，這樣的方式過於單薄，未能充分激發學生的興趣與思考能力。學生應該能認識到，計算策略結合工具使用，可以逐步獲得更精確的近似値。這不僅能提升學生對數學問題的理解，還能將數學與程式設計緊密結合，幫助學生在學習過程中體驗探索與解決問題的樂趣，同時爲未來的數學與資訊學習打好基礎。

三、工具的使用時機與侷限

數學教學中廣泛的使用各種軟硬體工具，其目的在於幫助學生獲得更多對數學概念的洞察。正如美國 2010 年數學課綱所指出，這些科技工具應被策略性地運用，用於探索並加深對基本數學概念的理解。然而，在工具帶來便利與提升學習效果的同時，也應認識到任何輔助工具都存在其自身的侷限性。現代科技的進步讓我們能夠輕鬆地在電腦上視覺化數值函數或幾何圖形，這爲數學學習提供了強大的支持。然而，這些工具不可避免地存在誤差限制，因此，引導學生認識並掌握這些誤差是數學教學中的重要任務。學生需要瞭解工具可能帶來的近似結果與眞實數學值之間的差異，並學會在特定情境下選擇合適的工具。同時，控制誤差並理解其對問題解決的影響，能夠培養學生更深層次的數學思維與分析能力。此外，學生需要長期的經驗與練習來判斷在不同情況下應使用何種工具。這不僅涉及工具本身的操作熟練度，也包括對工具適用範圍與限制的深刻理解。只有在不依賴工具但能有效利用工具的平衡點上，學生才能眞正將工具視爲學習的助力，並藉由策略性的使用，深化對數學本質的探索與掌握。

肆、他山之石：美國大學入學的 AP 進階數學課程

我們進一步從高中數學課程與大學數學專業需求銜接的視角，重新審視臺灣現行的課程綱要，特別是在 AI 時代對於人才培育的要求下，這一課題顯得尤爲重要。我們發現，現行十二年國教數學課綱在某些核心內容上，與大學課程的需求之間存在明顯的斷層，尤其是在數學專業對 AI 相關領域如數據分析、機器學習及算法設計的基礎支持方面。相比之下，美國數學課程及其 AP 課程提供了值得參考的範例，從設計更具挑戰性且應用導向的課程，爲學生進一步學習專業數學知識以進入 AI 相關技術領域做好充分準備。因此，我們認爲，有必要重新思考臺

灣高中數學課程如何優化設計，促進與大學專業課程的有效銜接，並滿足 AI 時代對高層次數學素養和技能的需求。

美國的國小、國高中數學課綱與臺灣的十二年國教課綱相似，皆是爲所有學生設計的基礎教育課程。而美國的 AP 課程則是專爲高中生規劃的非必修課程，旨在銜接高中與大學的課程需求，其定位爲讓高中生提前體驗大學層次的數學學習，不僅傳授先進的數學概念與方法，更注重培養學生的批判性思考和解決複雜問題的能力。AP 課程每年 5 月舉行全國統一測驗，例如 2023 年的 AP 微積分 AB、微積分 BC 以及統計測驗，共吸引超過 60 萬名學生參加，測驗滿分爲 5 分，其中超過 6 成的學生取得 3 分或以上。過去半個世紀以來，AP 課程在爲美國大學生提供扎實基礎教育上，發揮了極其重要的作用。若要完整比較臺灣的十二年國教數學課綱與美國的數學課綱，除了檢視美國 2010 年的數學課綱外，也必須深入瞭解 AP 數學課程與其測驗綱要。這是因爲十二年國教數學課綱中的高中數學選修課程設計，與美國 AP 課程具有相似性，其目標同樣是爲了有效更好地銜接高中與大學的學術需求。

AP 課程中的數學與資訊科學領域包含 6 門課程：AP 微積分先修（Precalculus）、微積分 AB、微積分 BC、統計、資訊科學原理（Computer Science Principles）以及資訊科學 A（Computer Science A）。其中，AP 微積分先修（Precalculus）是 2023 年新引入的課程，並於同年開始測驗。這門課程的核心內容聚焦於探索各種函數，特別是能夠描述動態現象的函數。它既可以作爲學生進一步學習科學和工程的數學基礎，也可以作爲不再繼續數學課程的學生，最後一次完整學習基本數學概念的機會。該課程分爲 4 個單元：一、多項式與有理函數：介紹多項式的性質及有理函數的應用；二、指數與對數函數：探索指數增長、衰減模型及其對應的對數應用；三、三角函數與極座標：研究三角函數的定義、圖像以及極座標的應用；四、多參數函數、向量與矩陣：涵蓋多變量函數、向量的運算及基本矩陣操作。

AP 微積分先修課程爲學生提供了深入理解函數及其應用的學習機

會，特別是那些與物理、工程及其他科學相關的實際應用。這門課程設計精細，既可作爲基礎課程引導學生邁向更高階數學，又可幫助學生從實際應用的角度全面掌握基本數學概念。這一課程的推出，進一步完善了美國高中數學課程與大學學術需求之間的銜接。

一、學習內容比較

與十二年國教數學課綱高中課程相比，AP 微積分先修課程在數學學習內容的深度與廣度上存在顯著差異，不僅擴展了數學概念的應用範圍，還特別強調關鍵概念的系統性與應用性。首先，AP 微積分先修課程在三角函數部分遠比十二年國教數學課綱完整。十二年國教數學課綱只介紹了 Sine、Cosine 與 Tangent（正切）函數，未涵蓋其他三角函數（如正割、餘割與餘切）的內容，這導致學生對三角函數的認識較爲片面。AP 課程強調觀察 6 種三角函數的變化，幫助學生掌握更豐富的數學經驗。此外，正切函數的反函數（arctangent）在微積分的發展中扮演關鍵角色，而 AP 微積分先修課程對此進行了詳細探討，這些都是十二年國教課綱所未涉及的內容。其次，AP 微積分先修課程的第四單元——多參數函數、向量與矩陣，雖然在內容難度上未超過十二年國教數學課綱高二數學，但其教學角度更貼近現代科學與 AI 的發展需求。例如，AP 課程以參數式作爲基礎，結合極座標來描繪平面曲線，讓學生直觀地理解參數與圖形之間的關係。參數是數學的基本概念，而掌握大規模的參數已成爲當今機器學習的日常工作。矩陣則用於描述系統狀態之間的過渡（transition of states），其中兩次過渡對應於矩陣相乘，這充分展現在 AP 微積分先修課程中，而十二年國教課綱對矩陣應用的處理相對不足。最後，AP 微積分先修課程特別強調隱函數的角色，這是一個在數學中具有深刻意義的主題。隱函數關係對描述複雜系統中的內在數學結構非常重要，並且在微積分學習中提供了更多思考空間。然而，十二年國教數學課綱完全忽略了這一方向，未能爲學生提供接觸這

類高階數學現象的機會。整體來看，AP 微積分先修課程的設計更側重於數學概念的應用與現代需求的銜接。例如，AP 課程強調三角學的完整性，探索參數式與矩陣在現代應用中的角色，並深入討論隱函數，爲學生奠定更廣泛且實用的數學基礎。此外，這些內容與 AI 和數據科學的核心技術緊密相關。因此，爲提升數學素養並符合時代需求，十二年國教數學課綱可參考 AP 課程的框架與設計，進一步優化數學教學內容，次第培養學生迎接未來的數學挑戰。

二、教學設計比較

相比臺灣十二年國教數學課綱的高三課程，AP 微積分更注重微積分教學的實踐與應用，並清晰列出了教學目標和學生需要掌握的核心技能。AP 課程從 4 個重點出發，全面鋪陳微積分教學的實踐：強調學生需明確敘述問題、確認適用的數學規則與程序以解決實際問題；要求學生能在圖像、數值、解析（代數運算）及口語描述之間靈活切換；基於定義、定理與判別法來解釋解題的邏輯與結果；正確使用 $f'(x)$、y'、dy/dx 等符號進行交流與運算。在微積分學習達到這一階段時，學生的數學語言運用能力，應建立在他們通過數學與科學的實際應用所累積的經驗之上。這些能力的發展依賴運算思維素養，使他們能在函數的圖像、數值、解析與口語描述之間靈活轉換並應付自如。相比之下，十二年國教數學課綱的微積分教學內容雖涵蓋基本的導數與積分概念，但在系統性與應用性上的設計相對薄弱，尤其是在數學呈現方式之間的靈活轉換與符號使用的熟練度培養方面。因此，AP 微積分課程提供了一個可供參考的教學框架，不僅可以幫助學生鞏固微積分的核心技能，還能讓學生有效將所學內容應用於實際問題中，也爲十二年國教數學課綱在微積分教學設計上的優化提供了借鑒，特別是在數學語言與運算思維能力的整合發展方面。

微積分是 AI 機器學習的核心基礎數學工具之一，我們同意多數高中學生，特別是那些未計畫升學至理工學院、經濟學或相關科系的學

生，並不需要必修微積分。然而，臺灣的許多高中數學教師具備充分的數學知識背景，可以在高中教授選修的完整微積分課程（相當於美國 AP 微積分 AB 與 BC）。這些選修課程的內容可以加深和擴展十二年國教數學課綱中涉及的微積分內容，但不必將其納入大學入學考試範圍。值得一提的是，美國大學入學考試中心的 AP 課程課綱中，也包含了一些並非 AP 測驗範圍的內容，但完整呈現了微積分的學科框架。在高中提供完整的微積分課程，目的是向學生展示一個完整的數學故事，而這正是數學教育的核心任務之一。一堂好的數學課，應讓學生有機會接觸更遠大的學科視野，幫助他們在長時間內逐步理解與消化，而不是急於追求考試成績或短期學習成果評估。數學教育的目標不僅在於傳授知識，更在於啓發學生對數學的興趣與思考，讓他們從學習中獲得更深層次的滿足與成長。

然而十二年國教數學課綱在高三選修數學的微積分未能呈現完整的微積分故事，僅僅涉及最淺顯的部分，這種淺嚐輒止的設計令人遺憾。教學內容沒有深入探討基本函數的微分與積分操作，也未引導學生熟練掌握三角函數、反三角函數、指數函數與對數函數的相關微積分應用，止步於微積分的核心門前，未能充分發揮微積分的數學價值。課程中雖提及極限現象，但並未進一步將極限方法與數列和極限理論結合，缺少對 L’Hôspital 法則及無窮級數收斂的積分判別法的講解。微分部分同樣不完整，缺乏對隱函數微分的介紹，甚至忽略了微積分中的重要定理如均值定理，而這些內容在 AP 微積分 AB 課程中都是基礎部分。此外，十二年國教數學課綱對積分技巧的介紹也非常有限，未提及「代換」積分法這一微積分 AB 中的基本技巧，更遑論分部積分法（integration by parts），這是在 AP 微積分 BC 中教授的進階積分方法。當前 AI 機器學習的數學基礎之一是向量值函數的微積分，而這部分內容也包含在 AP 微積分 BC 課程中。同樣，冪級數理論的完整引入，包括無窮 Taylor 展開式與 Maclaurin 展開式的討論，也是 AP 微積分 BC 的一大特色。這些工具的掌握對學生眞正理解微積分作爲有效數學工具的應用有著重要的地位，而這些在十二年國教數學課綱中均未提及。

總而言之，十二年國教數學課綱的高三微積分課程內容雖具基礎性，但因未涵蓋微積分的完整理論框架與關鍵應用技巧，導致學生無法全面理解微積分的深度與廣度。參考 AP 微積分 AB 和 BC 課程，適當增補缺失的內容，不僅能提高微積分教學的完整性，也能爲學生進一步學習數學或進入 AI 時代奠定更扎實的基礎。

伍、AI 模型建構中的數學——實例分析

當前 AI 領域已發展出各式各樣的函式庫，提供給使用者依資料特性彈性組合而成的工具。爲了進一步說明數學是 AI 發展的一個基石、以及 AI 對於數學教育的啓發，我們打算利用 2 個簡單的機器學習案例進行示範說明，此兩個模型均是以機器學習中最主要的倒傳遞神經網路爲架構，由神經網路的層數、神經元數量（數據的維數），以及激活函數所組成。訓練模型參數的方法，主要是以梯度降低法進行最佳值的求解，並運用 chain rule 微分工具逼近每個參數的最佳值。其中，第一個案例是從已訓練完成的模型，說明在模型的輸入與輸出間，數學素養如何提升對於模型的理解；第二個案例是從訓練模型調校參數的過程中，說明數學素養在模型建構時所扮演的關鍵角色。這兩個案例可以呈現在 AI 發展中是如何應用基礎數學。

一、案例一：已訓練完成之水果分類模型

此案例爲一個簡單的 4 層神經網路分類模型，旨在根據水果的形狀與重量 2 項特徵，對小玉西瓜、蘋果與奇異果 3 種水果進行分類。模型的第一層爲輸入層，包含 2 個神經元，分別對應水果的圓度（形狀接近圓形的程度）與重量大小。第二層爲隱藏層，由 2 個採用 ELU（exponential linear unit）激活函數的神經元組成。第三層爲另一個隱藏層，包含 3 個神經元，並透過 SoftMax 函數將輸出值轉換爲最終輸出層的機率分布。圖 1 顯示了使用 Python 撰寫的部分程式碼及模型訓練的輸出結果。

```
model = Sequential()
# 建立一個序列式的模型
model.add(Dense(2, input_dim=2, activation='elu'))
# 加入一層隱藏層，包含 2 個神經元，輸入維度爲 2，啓動函數爲 ELU。
model.add(Dense(3, activation='softmax'))
# 加入一層輸出層，有 3 個神經元，啓動函數爲 SoftMax。
```

```
Layer 1 ('dense') weights:
[[-0.62866855 -0.8795535 ]
 [ 0.5303564   1.4903426 ]]
Layer 1 ('dense') biases:
[ 2.7442696 -1.1798885]

Layer 2 ('dense_1') weights:
[[-0.04085465 -4.42944      3.8439677 ]
 [ 3.2410345  -1.662833   -0.38140038]]
Layer 2 ('dense_1') biases:
[-1.8881806   0.66835004  0.32566744]
1/1 [==============================] - 0s 41ms/step

預測結果：
輸入數據：圓度 =10.5, 重量 =10.2
預測概率：[9.9988735e-01 9.0585021e-13 1.1260554e-04]
預測類別：0 ( 西瓜 )
```

圖 1　水果分類模型部分程式碼與訓練結果

接著使用一筆測試資料進行分類預測，該資料的圓度爲 10.5，重量爲 10.2，屬於較接近圓形且重量較重的水果。模型預測該水果爲西瓜的機率爲 0.99。除了預測結果外，圖 1 還顯示了神經元之間各個連結的權重（係數）組合。若能透過路徑圖（圖 2）來視覺化這些權重，將有助於掌握模型內部各參數的數值大小與邏輯關聯。然而，從運算思維的角度來看，僅使用路徑圖表達思考脈絡，難以直接引入數學工具。若進一步採用矩陣運算（圖 3）來呈現模型係數間的代數關係，不僅能夠更完整地描述模型的數值特性，也能更有效率地運用各種數值方法來進行模型校準。

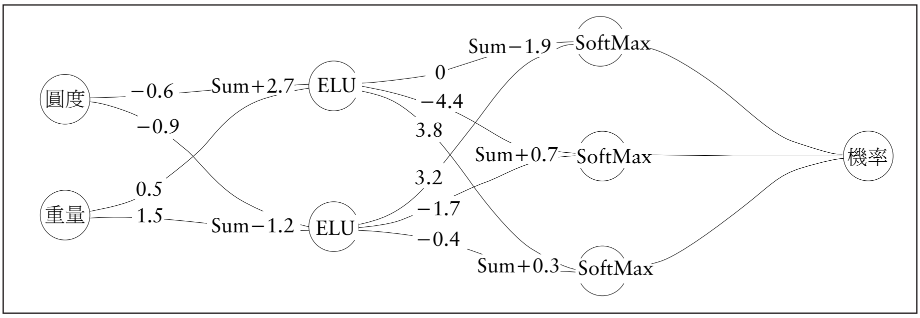

圖 2　路徑係數圖

給定某一水果其圓度為 10，重量為 5。

$$SoftMax\left(ELU\left(\begin{bmatrix}10 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-0.6 & -0.9\\ 0.5 & 1.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.7 & -1.2\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}0 & -4.4 & 3.8\\ 3.2 & -1.5 & -0.4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1.9 & 0.7 & 0.3\end{bmatrix}\right)$$

其中 $ELU(M)=[f(m_1,\alpha)\ f(m_2,\alpha)]$，$M=[m_1\ m_2]$，$f(x,\alpha)=\begin{Bmatrix} x & if\, x>0\\ \alpha(e^{x}-1), & if\, x\le 0\end{Bmatrix}$，此算是為當 $\alpha=1$ 時。

$SoftMax(G)=\begin{bmatrix}\frac{e^{g_1}}{e^{g_1}+e^{g_2}+e^{g_3}} & \frac{e^{g_2}}{e^{g_1}+e^{g_2}+e^{g_3}} & \frac{e^{g_3}}{e^{g_1}+e^{g_2}+e^{g_3}}\end{bmatrix}$。其中 $G=[g_1\ \ g_2\ \ g_3]$。

圖 3　模型的數學算則

此外，若能進一步將矩陣運算的表達方式提升至數學符號的抽象表示（圖 4），則可避免繁瑣的數值計算，並以更邏輯化的方式掌握該演算法的核心概念。

根據上述案例，我們認為具備符號表達算則的數學素養，在提升資訊素養上的重要性不言可喻，特別是在面對處理複雜的多層次網路架構時，數學素養可以幫助連結程式輸出、圖形化表達與數學算則，進而掌

$$\boxed{SoftMax(ELU(aW_1+b_1\ )\ W_2+b_2)}$$

圖 4　模型的數學概念符號

握模型訓練中的數學運算過程。具體來說，此案例在神經網路模型的構建過程中，線性代數的矩陣運算是其最核心的運算基礎，包括矩陣乘法、矩陣加法、內積等。若能熟練掌握這些運算思維，將有助於瞭解神經網路如何進行學習，以及如何調整參數的過程。在此前提下，國中小階段數學課程中的函數概念和基礎演算法，以及高中階段數學課程中的指數、矩陣運算、向量和延伸的函數的值域概念均是這些運算思維的重要數學基礎，當學生具備了這些數學基礎，將來就更有能力去操作高層次的神經網路架構，例如，深度神經網路或卷積神經網路等，雖然這些高階的網路模型的運算複雜性會呈現指數級增長，但其核心概念主要還是圍繞在線性代數的算則。因此教導學生熟悉這些運算和相關數學概念，是數學教育結合資訊科學教育可發展的面向之一。

二、案例二：模型最佳值求解

此案例爲利用 3 層的倒傳遞神經網路架構，訓練以水果種植過程中的肥料用量進行水果甜度預測的模型，因此假定有一組資料，如圖 5 資料散布圖所示，該資料顯示出，使用過少或過多的肥料，所種出來的水果甜度均不高，然而當肥料使用量適中時，能產出最高甜度的水果。

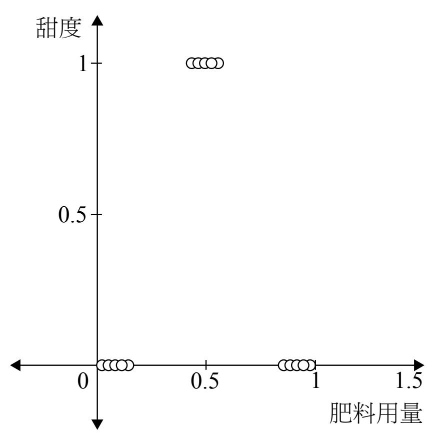

圖 5　案例二資料散布圖

爲簡化繁複的計算細節以方便進行說明，圖 5 的肥料用量值域從 0~1 之間，愈接近 0 代表用愈少肥料，愈接近 1 代表用愈多肥料，水果甜度的值域也是從 0~1 之間，愈接近 0 代表水果愈不甜，愈接近 1 代表水果愈甜。圖 6 爲訓練後的神經網路係數路徑圖。

圖 6 顯示出案例二模型爲 3 層架構的神經網路，包含一層輸入層，僅一個神經元；一層隱藏層，包含 2 個神經元；一層輸出層，亦僅包含一個神經元。

激活函數爲 sigmoid，其函數式爲 $\frac{1}{1+e^{-x}}$ 。因此模型由 3 個路徑組合而成，分別爲：

路徑一：$h(x)=\dfrac{1}{1+e^{-(-7.9x+1.2)}}$

路徑二：$g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-(3.9x-3)}}$

路徑三：$f(x)=-2.2h(x)-2.4g(x)+1.7$

其中，x 代表肥料用量，$f(x)$ 代表預測的水果甜度。此神經網路模型的 3 個路徑之幾何圖形如圖 7 所示。

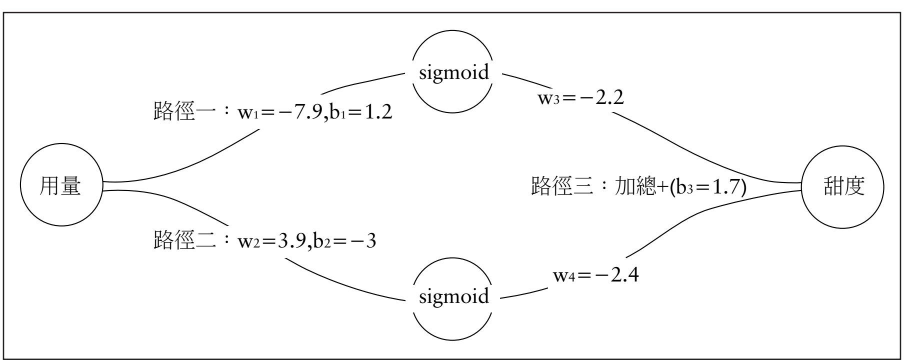

圖 6　案例二神經網路係數路徑圖

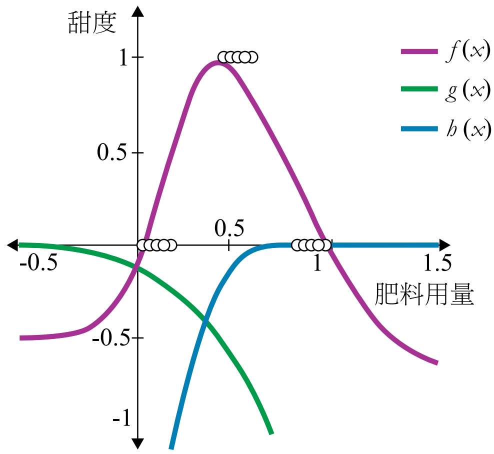

圖 7　案例二模型 3 個路徑幾何函數圖

爲了說明利用倒傳遞演算法訓練此模型的數學概念，同時演示模型校準過程所使用的 chain rule 微分工具，和優化最佳解的梯度降低法（gradient decent），我們假定模型中的常數項 b_3 未知以進行求解。倒傳遞演算法求取最佳解的方式並不是直接求解，需要先給定未知系數的初始值，再經由逐步校準過程逼近最佳解，因此我們先給定 $b_3=0$ 爲初始值，如圖 8 所示，尙未最佳化的解以括號顯示。同時爲了降低繁複的計算細節，以掌握演算法的主要概念，我們將以 3 個資料點進行運算演示，資料如表 1 所示。

表 1　範例資料

肥料用量	水果甜度
0	0
0.5	1
1	0

圖 9 爲圖 8 中 b_3=0 情形下，各路徑的幾何圖形。從圖 9 可以得知，b_3=0 的情形下求得之未最佳化預測函數 $f_1(x)=-2.2b(x)-2.4g(x)+(0)$，其中，$x \in \{0 \quad 0.5 \quad 1\}$ 其函數圖形（圖中的紫色線條），離眞實資料點的差異很大，因此需進一步求取 b_3 的最佳解。

不同的 b_3 數値會得出不同的預測函數，而解算出不同的預測數値，其殘差函數 SSR 爲：

$SSR(b_3)=\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(b_3))^2$

其中 $P_i(b_3)=-2.2b(x_i)-2.4g(x_i)+b_3$，$(x_1, x_2, x_3)=(0,0.5,1)$

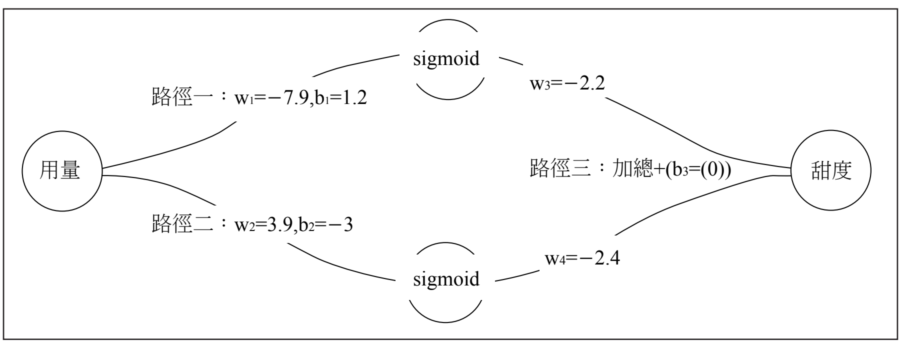

圖 8 給定 b_3=0 爲初始值之路徑係數圖

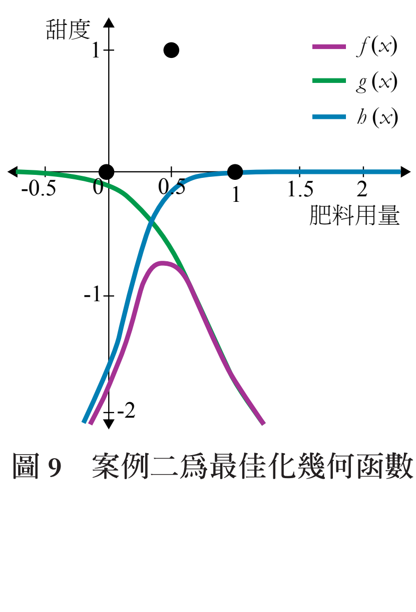

圖 9 案例二爲最佳化幾何函數圖

Oi 爲眞實的觀察值，也就是資料中的三種肥料用量的水果甜度，Pi 爲模型預測值，也就是根據 3 種肥料用量｛0　0.5　1｝所計算出來的水果甜度。由於 b_3 尚未最佳化，可以是任意實數，b_3 數值所對應的 SSR 函數圖形如圖 10 所示。

圖 10 中 SSR 的最小值即爲實際水果甜度與預測水果甜度差異總和的最小值，也就是最佳解，爲求得哪一個 b_3 數值能讓 SSR 數值最小，可進行 SSR 函數對 b_3 取一階導數的計算，求得 SSR 對 b_3 的斜率函數。此部分須利用 chain rule 進行導函數的求解。其數學表示式如下：

$$\frac{dSSR(b_3)}{db_3}=\sum_{i=1}^{3}\frac{d\,(O_i-P_i(b_3))^2}{db_3}=2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(b_3))\times\frac{d\,(O_i-P_i(b_3))}{db_3}=-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(b_3))$$

此爲 SSR 的斜率函數。

根據此斜率函數，可以求得 SSR 中，任一 b_3 對應值的切線斜率，因爲 SSR 的最小值發生在斜率爲零處，精準求解的數學算法爲令此斜率函數爲 0，進而計算出 b_3 的數值，但此種方法在面對多重共線性、非凸問題等狀況時，會有無法微分的問題，因此倒傳遞神經網路乃採用梯度降低法（gradient decent）進行最佳解的求取。梯度降低法的概念爲，

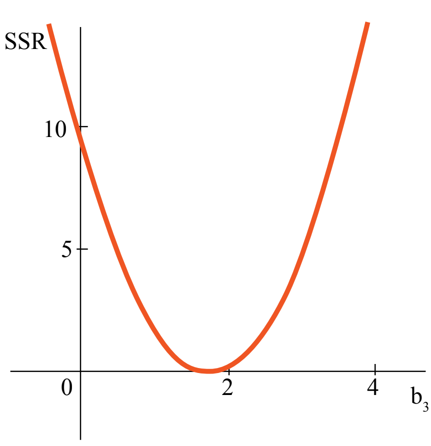

圖 10　SSR 函數圖形

在求最佳解的過程中，當遠離最佳解時，其逼近的步長較長，而愈接近最佳解時，其逼近的步長較短，因此可以在有限的步數（或者說是計算成本）內逼近最佳解。

案例二以梯度降低法求取最佳 b_3 值的計算演示如下：

先求得 SSR 在 $b_3=0$ 時的切線斜率。

$$-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(0))=-2\times((0+1.8)+(1+0.75)+(0+1.7))=-10.5$$

再將斜率乘以學習速率以求得步長，在此演示中學習速率訂爲 0.1，因此步長爲 −1.05。接著再將 $b_3=0$ 減去步長以求得第二階段的 $b_3=0-(-1.05)=1.05$。

第三階段求得 SSR 在 $b_3=1.05$ 時的切線斜率。

$$-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(1.05))=-2\times((0+0.75)+(1-0.3)+(0+0.65))=-4.2$$

第三階段的步長即爲 −0.42，$b_3=1.05-(-0.42)=1.47$。

第四階段求得 SSR 在 $b_3=1.47$ 時的切線斜率。

$$-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(1.47))=-2\times((0+0.33)+(1-0.72)+(0+0.24))=-1.7$$

第四階段的步長即爲 −0.17，$b_3=1.47-(-0.17)=1.64$。

第五階段求得 SSR 在 $b_3=1.64$ 時的切線斜率。

$$-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(1.64))=-2\times((0+0.16)+(1-0.89)+(0+0.07))=-0.68$$

第五階段的步長即爲 −0.068，$b_3=1.64-(-0.068)=1.708$。

第六階段求得 SSR 在 b_3=1.708 時的斜率。

$$-2\sum_{i=1}^{3}(O_i-P_i(1.708))=-2\times((0+0.1)+(1-0.95)+(0-0))=-0.3$$

第六階段步長爲 –0.03，步長已接近 0，因而停止計算。

圖 11 爲利用梯度降低法逼近 SSR 最小值時，不同斜率的圖形，顯示出不同 b_3 對應的 SSR 切線斜率逐漸變小的梯度降低過程。

案例二的數學基礎均架構在微積分與線性代數的整合上，若進一步從案例二的運算思維來檢視案例一的分類問題，可以發現案例一的輸出層採用 SoftMax 函數，透過計算多類別神經網路輸出的機率分布，達成正確的預測，若從倒傳遞演算法的梯度降低算則進行此模型的參數推估，直接使用模型輸出的機率分布，進行如案例二的 SSR 函數進行殘差估算，會降低模型校準過程的效率，因此多類別機率分布的輸出模型多會以 Cross Entropy 進行殘差估算，這種轉換的數學基礎涉及機率概念與微積分的整合，在機器學習技術中是一個關鍵。因此數學課程應重視微積分與機率概念的基礎學習，以利降低後續進入 AI 領域的門檻。

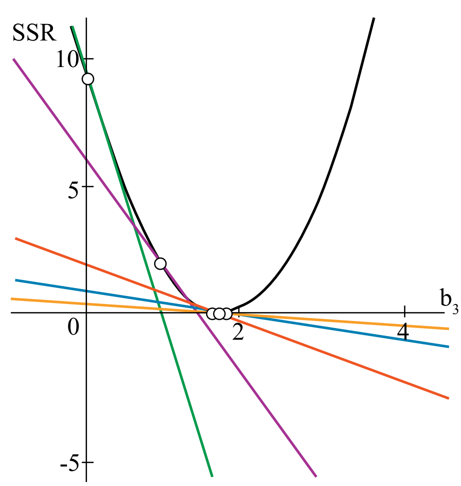

圖 11　SSR 不斷接近最小值的斜率變化

陸、結論與建議

數學學習與人工智慧的機器學習本質上都涉及規律的辨識以及對數據集合結構的探討。數學活動是人類文化的一部分，通過自然人腦的思考發展出精確的數學語言，用以描述數學世界的現象並研究數學結構的規律性。這些規律性不僅推動了數學本身的發展，也爲科學、技術與工程領域提供了廣泛的應用可能。另一方面，機器學習是人工智慧的一個分支，基於電腦技術來模擬人類學習的過程。它以大量的數據作爲基礎，然後運用數學工具進行處理與分析。在這個過程中，機器通過所謂的「黑箱」數學演算進行圖形與模式的識別，最終構建出由機器判斷得出的結構。在 21 世紀，我們已邁入人類與電腦機器共存共學的時代，兩者的協同合作將爲知識探索與技術創新開闢新的可能性。

十二年國教數學課綱授課時數的減少對許多第一線數學教師帶來挑戰，但我們在此不聚焦於授課時數的爭議，而是希望在既定的教學時數限制下，探討如何達成最佳的教學成效。同時，我們也暫不討論大學與高中數學入學考試範圍的更動。然而，針對有興趣選讀 AI 相關科系或學習能力超前的學生，我們認爲有必要提供加深加廣的選修數學課程，以作爲大學甄選學生時的參考依據。我們相信，至少有十分之一的臺灣高中生具備學習如美國 AP 數學這樣加深加廣的選修課程的能力，而臺灣教育也理應提供這些學生學習這些加深加廣數學的多元管道。目前，臺灣部分頂尖高中已經有數學教師自行設計教案，教授超出十二年國教數學課綱高三選修範圍的數學課程。然而，這些課程在與大學課程接軌的效果上，明顯不如美國 AP 數學課程。美國的 AP 數學課程由 College Board 規劃，其會員包括數千所大學與高中，擁有完整的課程架構，專爲高中與大學教育的銜接設計。美國的高中教師可以透過認證具備教授特定 AP 課程的資格。而學生則可在高中選修 AP 課程或自學後參加每年 5 月舉行的檢定測驗。檢測成績不僅可作爲學生申請大學的評估依據，也提供大學錄取時的參考。在過去半個世紀中，AP 課程與測驗對

美國高中與大學之間的教育銜接產生了深遠影響。臺灣若能參考這一模式，針對特定學生群體設計更具挑戰性與延展性的課程，無疑能爲學生的基礎專業能力發展與升學提供更多支持。

以下我們提出兩個面向的建議。首先，基於對美國及臺灣十二年國教數學課綱的比較，我們針對十二年國教數學課綱提出以下的 4 點反思與改進建議。

一、對現行數學課程的調整建議

（一）概念的演化與連結

數學與許多其他學科不同，其特點在於結構層層相扣，並具有多重面向的連結特性。因此，在數學課程的設計中，掌握基本概念之間的連結線索往往是成功學習的重要關鍵。以美國 2010 年的課綱爲例，其與以往課綱的一大差異在於強調連結的理念，要求跨越不同年級課程的內容進行整體性的思考與設計。十二年國教數學課綱也強調連結的重要性。課綱強調不同表徵、不同數學內容及不同年級的連結。但如何能幫助學生成功建構連結仍然是臺灣數學教學面臨的挑戰之一。我們認爲理想的數學教案應注重直觀且適時的深入探索，引導學生觀察數學世界的現象，並將電腦等科技工具作爲輔助。以緊湊且生動的數學故事激發學生的學習興趣是關鍵，好的教科書應具有啓發性，使學生在探索中自然地掌握數學的邏輯與美感。我們特別不建議將本可以一氣呵成的概念，分割到不同年級教授。這種斷裂式的學習，猶如瞎子摸象，只會讓學生迷失在碎片化的知識中，難以建立完整的數學思維框架。在現代科技快速變革的時代背景下，教育的核心素養之一正是教導學生接受與面對各種概念的演化與連結，並瞭解基本數學概念之間的重要關係。啓發學生的好奇心是數學教育的第一步。一旦學生被數學的美感與應用潛力吸引，他們便有能力將數學應用於不同領域。教育的任務是將各種基本數學概念完整且有系統地介紹給學生，並提供他們探索與實踐的機會。

（二）見樹也要見林

在人工智慧的時代，機器學習的運作大多是在「黑箱」中進行，僅有少部分在「白箱」中透明進行。人們可以完全以學習過的數學理論來理解「白箱」的機器學習運算及推理歷程。然而「黑箱」的機器學習則因其內部運算機制的高度複雜性，很難清楚其對應的演算歷程。但「黑箱」在實際應用中往往能帶來卓越的成果。將這一現象引入數學教學，可以啓發我們如何在有限的教學時間內，高效地引導學生學習數學。透過數學現象的描述，幫助學生快速掌握概念的演化與連結是關鍵。我們不需在每個定理上都進行詳盡的證明，而是根據教學目標，選擇性地完成少量關鍵定理的完整論證。同時，提供學生具體的、直觀的啓蒙例搭配概略的證明通常已足夠讓學生理解相關概念。其有助於發展學生將來在相關情境脈絡中靈活運用已學基本數學知識的重要能力。在這樣的啓發式教學環境中，數學教師的能力尤爲重要。透過生動的數學故事與基本概念的巧妙連結，教師能有效地引發學生的興趣，幫助他們建立數學的直觀理解與邏輯思維。最終的目標，是讓學生既能「見樹」，理解個別數學概念的細節，又能「見林」，把握數學整體的結構與應用。

（三）適度改編數學領域課程手冊

我們建議在十二年國教數學課程手冊中刪減部分帶有主觀色彩且不屬於核心素養範疇的負面表列。例如，「不介紹輾轉相除法」的規定並非必要，是否教學應交由教師根據教學需求與學生能力靈活決定。雖然高中入學考試可不涵蓋此內容，但輾轉相除法作爲一項重要演算法，其價值應該由教師判斷，避免過多限制教學自由。針對高中數學選修課程，建議參照美國 AP 課程模式，適度加深加廣內容以銜接大學需求，例如，微積分課程應引入均值定理、極限中的 L’Hôspital’s 規則，以及泰勒展開式等進階內容；同時提升學生對各種基本函數操作的熟練度，而不僅只是局限於多項式函數。這些進階課程可不列入統一考試範圍，但應提供給具有潛力的學生作爲進一步學習的選項。此外，在工具使用

規範上，我們建議課綱手冊涵蓋更多教學工具的介紹，例如計算代數系統（CAS）、電子表格（Excel）、動態幾何操作軟體（如 GeoGebra）等現代數學軟體，而非僅侷限於傳統計算機工具。臺灣作爲全球電腦硬體設備領域開發的領頭羊，完全具備爲學校環境建構豐富教學工具庫的能力，這些工具若能配合教學需求並設計得便於操作，將大幅提升教學效率與學生的學習興趣。通過更靈活的課程設計和多樣化的工具支持，我們相信能更有效地培養學生的數學素養，並銜接未來的學術與實際應用需求。

（四）鼓勵數學教科書編者撰述完整的數學故事

數學的進步往往源自數學家對未知的好奇心，而最優質的教育正是讓教師能夠啓發學生鍥而不捨地追求知識。在教學中，生動的概念引入可以從講故事開始，這不僅能激發學生的興趣，還能提供學習的動機。隨著教學活動的推進，適時的例題能促使概念的進階發展，並與其他相關概念產生聯繫，進一步深化與鞏固學生的理解。同時，跨越不同年級課程內容的連結能讓學生逐步提升對數學操作的精準感知與掌握，隨著學習經驗的積累，這種能力也會持續強化。數學課程充滿了有趣的故事，但這些故事必須完整。例如，若只介紹微分與切線卻不講解均值定理，就像只說了一半的故事；或是談到圓周率 π 的近似值時，提到古希臘和古中國的貢獻，但在引入無窮級數時卻未討論中世紀數學家如何利用它來更精確地計算 π。這種片面的教學無法讓學生體會數學概念之間的深層關聯。數學概念的結構是多面向且層層累積的，每一層的學習都應與其他層面相輔相成。教師的角色在於幫助學生看到這種結構的全貌，透過完整的故事與連貫的概念，引導他們發掘數學的邏輯之美與應用的可能性，讓學習成爲一個不斷探索與深化的過程。

二、AI 時代數學教育可行策略

另一方面，我們可以從 AI 模型建構中應用的基礎數學（見本文第伍部分）反思十二年國教數學課綱進一步可以發展的方向。

（一）基礎數學在現代更為重要

在國小到高中數學教育中，我們不需要追求教授更多的數學知識，而是要確保基礎數學被扎實、完整地教授。如果學生未來預計發展 AI 相關領域專長或需要藉助 AI 環境進行共同學習，他們的數學基礎應該包括熟悉各種基本函數及其背後所代表的數學意義，掌握基礎線性代數（如矩陣運算）、基礎統計學，以及核心的微積分知識。

在機器學習的實際操作中，激活函數是關鍵，其數學基礎主要來自指數函數和絕對值函數，這些均是國高中數學課程範疇。例如，ELU 和 Sigmoid 是常見的激活函數。選擇不同的激活函數會導致機器學習模型性能的顯著差異。例如，ReLU（Rectified Linear Unit）函數因其處理非線性問題的優勢，在深度學習中更具應用價值，而 Sigmoid 函數可能在深層神經網絡中導致梯度消失，從而限制其應用。如果學生能夠深入理解這些基本函數的區間範圍、變化關係及其他數學特性，將能在未來的機器學習應用中更加靈活地選擇和運用這些工具。

對此，數學教育應結合直觀理解、多樣呈現與實際應用，幫助學生建立紮實的函數基礎。透過圖像化學習，學生可以直觀感受函數的變化關係、區間範圍、對稱性與極值特性；結合實際情境則能增強學習的動機與靈活應用能力。此外，數學教育應強調函數在 AI 應用中的價值，例如解釋激活函數（如 ReLU 與 Sigmoid）的特性與適用場景，讓學生瞭解不同激活函數如何影響深度學習模型的性能。藉由數學建模活動與探索式學習，學生可以應用基本函數解決實際問題，進一步深化對函數意義的理解。同時，結合動態數學軟體（如 GeoGebra）或編程工具（如 Python），可使學生更輕鬆地進行函數圖形的生成與數值模擬，體會科技與數學的融合。另外，傳統數學教育往往強調尋找「完美解答」，這反映出純數學的嚴謹性與理論性。然而，在應用數學中，重點是找到「足夠好」的近似解以解決實際問題。例如，梯度降低法是一種用於尋找無法以封閉形式求解的極值的數值方法，這種方法追求的並非理論上的精

確解，而是逐步逼近的最佳解。在多數實務場景中，這種逐步逼近是邏輯上唯一可行的策略。梯度降低法基於基礎的多變數微分，隨著 AI 技術的突破性發展，已經成為應用最廣泛的數學工具之一。

限於篇幅，我們未能深入探討基礎數學中的機率與數據科學對 AI 的影響。然而，這是一個在 AI 時代極為重要的基礎數學方向。我們建議高中數學課程中的統計部分，可以結合生活情境來重新檢視並強化一些基本概念，例如，「迴歸分析」和「隨機變數」。這將有助於學生為更廣泛的數據科學領域做好準備。高二數學課程講到條件機率與貝氏定理，更是適當時機說到貝氏網路與貝氏分類的精彩故事。

（二）從三維以內可視覺化的空間思考經驗，到面對多參數數據所在的極高維空間

在進入 AI 時代後，所處理的資料與問題通常「存在」 於極高維空間。然而，對初學者而言，直接理解與分析多維空間中的數據集合具有極高的學習門檻。因此，從三維以內的視覺化思考經驗開始，成為打下基礎的重要步驟（例如，圖 12 以視覺化方式直觀呈現三維梯度降低法的概念）。透過三維視覺空間的推理訓練，學生可以以具象方式理解幾何概念，逐步為處理多參數、高維問題奠定基礎。例如，在學習向量與矩陣的過程中，三維空間中的向量操作直觀地展示了加法、減法與內積等基本運算，讓學生能夠更快地掌握相關概念。透過具體的視覺化訓練，例如利用圖形軟體或動態模擬，學生不僅能熟練操作向量，還能逐步培養想像高維向量空間的能力。

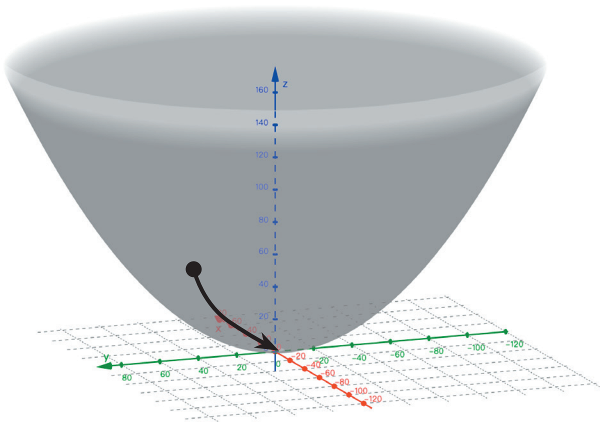

圖 12　三維梯度降低法示意圖

學生應該被清楚告知，未來所面對的數據集合確實存在於高維空間。然而，當我們討論兩個固定數據向量（無論它們位於多少維空間）之間的關係時，實際需要檢視的是這 2 個向量所生成的平面（除非這兩個向量線性相依）。在這個平面中，我們可以簡單地計算出 2 個向量的夾角與內積，這些操作在數學上都相對直觀，就像這個生成的平面位於實際的三維空間一樣。因此，培養學生對三維空間中幾何關係的視覺化推理經驗，不僅是數學學習的重要基礎，更是高中數學教育可以導出長遠影響的重要方向。

參考文獻

十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——科技領域（2018）。

[*Curriculum guidelines of 12-year basic education: Technology domain for elementary,junior high school and upper secondary school education.* (2018).]

十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域（2018）。

[*Curriculum guidelines of 12-year basic education: Mathematics domain for elementary, junior high school and upper secondary school education.* (2018).]

行政院科技會報辦公室（2018，1 月 18 日）。**臺灣 AI 行動計畫**。https://www.ey.gov.tw/Page/448DE008087A1971/a28cd96b-bcc3-49ae-a09c-0381dbba69a7

[Board of Science and Technology, Executive Yuan. (2018, January 18). *Taiwan AIaction plan*. https://www.ey.gov.tw/Page/448DE008087A1971/a28cd96b-bcc3-49ae-a09c-0381dbba69a7]

行政院智慧國家推動小組（2023，2 月）。**臺灣 AI 行動計畫 2.0**（2023~2026 年）。https://digi.nstc.gov.tw/File/7C71629D702E2D89

[Executive Yuan Smart Nation Promotion Group. (2023, February). *Taiwan AIaction plan 2.0* (2023~2026). https://digi.nstc.gov.tw/File/7C71629D702E2D89]

國家教育研究院（主編）（2020）。**十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域課程手冊**。https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/2069/數學領域課程手冊 (定稿版).pdf

[National Academy for Educational Research. (Ed.). (2020). *Curriculum guidelines of 12-year basic education: Mathematics domain curriculum manual for elementary, junior high school and upper secondary school education*. https://www.naer.edu.tw/upload/1/16/doc/2069/數學領域課程手冊 (定稿版).pdf]

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2025, February 28). *Future-focused mathematics curricula: Empowering learners for the 21st century.*

Porter, A., McMaken, J., Hwang, J., & Yang, R. (2011). Common core standards: The new U.S. intended curriculum. *Educational Researcher*, *40*(3), 103-116. https://doi.org/10.3102/0013189X11405038