

學生的空間測量能力及教科書的面積與 體積教材之探討

黃幸美

本研究使用文獻分析法，探討接受九年一貫課程學生在 2006~2018 年數學學力檢測的空間測量解題能力。同時，分析依據九年一貫課程綱要發展的教科書之面積、體積（含容積）單元的教學問題編製情形。研究結果發現：學生在面積與體／容積測量及測量估測表現不理想；於解決需應用測量的概念與程序性知識以推理思考的應用解題類型問題，學生的解題能力遜於解決概念理解及程序執行類型問題的能力。教科書的面積與體／容積教材提供充分的圖示表徵，惟偏重測量單位知識及程序執行的問題，應用解題性質的問題較少，而且測量估測問題寡少。依據研究結果，針對培養學生測量知能與強化應用解題能力，提出未來課程發展建議。

關鍵詞：九年一貫課程、空間測量能力、教科書、面積、體積

收件：2020年6月30日；修改：2020年9月8日；接受：2020年9月18日

Study of Students' Spatial Measurement Competence and Textbook Units of Area and Volume Measurements

Hsin-Mei E. Huang

This study employed document analysis to investigate the mathematics ability of students who received the mathematics curricula based on the Guidelines for the Grade 1-9 Curriculum. The focus was on spatial measurements examined by using two large-scale assessments of mathematics ability in elementary school students; the assessments were held from 2006 to 2018 in Taiwan. Moreover, content analysis was conducted for analyzing types of mathematical problems provided in the units of area and volume measurement of mathematics textbooks. The results demonstrated that elementary school students were weak in the areas of area and volume measurements and measurement estimation. Students' ability to solve the type of problems that demanded problem-solving competence was poorer than their ability to solve problems that required conceptual understanding or procedural process skills. Although the textbook units provided sufficient figures and representations for illustrations, they contained more problems demanding conceptual understanding and procedural process skills than problems demanding problem-solving competence. To develop students' knowledge of spatial measurement and improve their problem-solving competence, suggestions on spatial measurements are provided for future textbook development on the basis of the results.

Keywords: Guidelines for the Grade 1-9 Curriculum, competence in spatial measurement, textbook, area measurement, volume measurement

Received: June 30, 2020; Revised: September 8, 2020; Accepted: September 18, 2020

壹、緒論

有視於培養新世代學生具備更高階能力的必要性，教育部於 2019 年起實施十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域（以下簡稱十二年國教課綱），依據十二年國教課綱發展的課程也使用於國小一年級學生（十二年國民基本教育課程綱要總綱生效令，2017）。時值新、舊課綱與課程交替階段，檢視學生學得了什麼，是改革歷程中檢視課程施行成效的要務。

在國小數學課程施行成效檢核方面，除了分析國際評量結果報告以外，國家教育研究院（以下簡稱國教院）及臺北市政府教育局（以下簡稱北教局）為了解接受國民中小學九年一貫（以下簡稱九貫）課程的學生達成基本能力指標的情形，乃以九貫課綱為架構分別發展試題，施行數學能力檢測。北教局自 2006 年起，每年對臺北市高年級學生施行數學基本學力檢測（北教局，2007）；國教院自 2010 年起協助縣市辦理學生的數學學習能力檢測（國教院，2012）。上述檢測發展過程嚴謹，試題具有信度與效度，而且受測學生數皆上達萬人，其評量結果報告學生解決數學問題的能力，幫助教學者了解學生的學習趨勢與瓶頸，其資料庫也供研究者檢視九貫課程實施近 20 年的成效。

測量知識具有生活實用功能且與數學其他主題的概念緊密連結（例如：數與計算及幾何）（Venenciano & Dougherty, 2014），尤其長度、面積、體積、容量及角度具有幾何圖形與空間性質，常需藉比較、使用工具測量與計算或執行估測，上述技能與量的推理尤為數學與科學課程的重要內容（Clements et al., 2017）。所謂測量知識的理解，包含理解測量的概念性與程序性知識，並能應用上述知識以推理思考（Battista, 2007; Smith III et al., 2013），前者指認識測量性質、單位知識、測量的原理原則；後者指測量的實作程序、使用工具、丈量與運算。此外，能綜合應用上述兩類知識、理解圖示表徵、運用空間思考以推理解題，為解決高認知層次問題所需的思考（Battista, 2007; Venenciano & Dougherty,

2014)。上述知識性質與認知思考類型的分類，和臺北市、國教院數學能力測驗的空間測量命題內容——概念性了解（概念理解）、程序性知識（程序執行）及應用解題（解題思考）能力檢測（北教局，2007，2017，2018；國教院，2012，2017a，2017b），相互呼應。

國際數學和科學教育成就趨勢調查（Trends in International Mathematics and Science Study, TIMSS）報告顯示，我國國小學生在幾何和測量領域的成就遜於其他領域。依據 2011 年 TIMSS 數學評量報告（林陳涌等人，2017）：相較於數及資料呈現領域，我國四年級學生於幾何和測量領域表現相對低落，而且此種低落的現象從 TIMSS 2003、TIMSS 2007 持續到 TIMSS 2011；相較於 TIMSS 2011 的表現，四年級學生於 TIMSS 2015 雖表現進步，但猶遜於數領域的表現（張俊彥等人，2018）。由於 TIMSS 數學評量與數學課程內容密切關聯，其評量結果也反映數學課程與教學成效（Wu, 2009）。有視於國小學生於國際評量的幾何與測量主題，多年表現不甚理想，此現象是否也呈現於國內數測的空間測量解題表現？哪些測量類項對學生的解題具有挑戰性？值得進一步探討。

教科書是教師教學的主要依據、學生學習的重要資源（Clements, 2002）。根據 TIMSS 2003 調查國小教師使用教科書的情形（張秋男等人，2005）及 Askew 等人（2010）的分析顯示：臺灣的國小教師相當依賴教科書教學，90% 以上的教師將數學教科書作為基本參考教材。影響學生數學成就的因素多元（Tarr et al., 2008），數學教科書的內容編製非直接影響學生的數學成就，但是教科書的內容與問題類型（例如：概念理解、程序性知識及應用解題），卻為影響學生解決不同認知層次問題能力不可忽視的因素（Hadar, 2017）。

Lehrer（2003）指出相較於長度測量，面積與體積（含容積）測量較複雜，問題解決的難度也較高。教科書的面積與體／容積的教學問題類型提供情形如何？配合教學問題而提供的圖示表徵數量如何等，有待分析。時值十二年國教課綱課程發展的重要階段，探討接受九貫課程學生在 2006~2018 年國內數學檢測的空間測量解題表現，有助了解此課程施行成效，同時，分析依九貫課綱發展的教科書之面積與體／容積單

元，藉學生數學成就與教科書編製的實況分析，裨益新課程設計與教學工作者參考，掌握調整與再強化的方向。

貳、文獻架構

一、空間測量的知識

長度、面積、體積、容量與角度皆為空間測量，但各有其屬性。因此，形成（例如：將兩點連成線段、使用線段圍出封閉的圖形等）、記憶保留及藉空間視覺（spatial visualization）與心理意象操作物件（例如，想像物件平移、翻轉、旋轉等變換的動態過程與樣式）等空間思考，為解決測量問題的重要認知運作（Hawes et al., 2017）。藉助操作實物的經驗、心理翻轉與旋轉的運作，以理解平面與立體圖形特徵、辨識二維與三維的圖示表徵及其關係，尤為成功解決較複雜的面／體積測量問題的必要能力（Battista, 2007; Lehrer, 2003）。

依據數學課程綱要（十二年國教課綱，2018；國民中小學九年一貫課程綱要——數學學習領域（三版）【2008年課綱】，2010）及相關研究（Lehrer, 2003; Smith III et al., 2013），學習空間測量需掌握的概念結構，簡述如下。（一）直線段指連接兩點的幾何圖形，長度測量即使用某線段為單位，測量兩點之間的直線段距離。有關長度概念與程序性知識，包含：運用單位概念認識尺的刻度意義，報讀線段在尺規上的起點與終點之間的距離等基本技能。此外，周長指圖形外圍邊界的總長度，其執行程序為測量圖形的邊界長度並運算總和。（二）面積指封閉圖形內部平面區域的大小，面積測量為使用平面單位測量一個封閉圖形的大小。（三）體積包含內體積與外體積。丈量固體物件外部所占空間的大小為外體積的測量。（四）容量指測量固體容器內部空間的大小。測量液體（例如：水）體積為常見的容量測量活動，其概念與體積測量密切相關（Huang & Wu, 2019）。（五）角概念包含圖形角與旋轉角（周筱亭、黃敏晃，2003；Mitchelmore & White, 2000）。前者乃將角視為一種圖

形表徵，指兩線段相交但止於一點（頂點）的圖形；後者隱含移動與旋轉，指一射線繞著一個固定端點旋轉，旋轉的程度為該射線的起始與終止位置之間的關係，而且描述轉動的起始方向。將尺的長度概念作類比應用，認識量角器的結構，測量與報讀角的張開或旋轉程度，為角度測量的程序性知識。

另一與測量能力高度相關的技能為測量估測，其指在無使用工具的情況下，使用心理單位測量待測物而得一個約估的量。估測者需藉知覺觀察待測物，回憶先前的測量經驗並找出測量基準點，利用心理單位對待測物進行心理截割或推論，繼而計算所截割的數量並描述估計結果（Joram et al., 1998）。因此，測量估測為一種統合知覺、記憶、心理意象、推論與運算等多項認知運作的活動，需藉由課程與教學（例如：實測操作經驗）而養成的一種心理估計與推理的數學能力（黃幸美，2016）。

因此，空間測量的核心知識包含：認識待測量的屬性，選用具有同一屬性的單位（Venenciano & Dougherty, 2014）並將單位重複覆蓋在待測物上（或填入、比較），此過程猶如使用單位將待測物分割為數個部分，藉助保留概念與推理運思以比較待測量與測量單位的關係，繼而使用運算程序計算所測得的量，使用語言表達測量結果（周筱亭、黃敏晃，2003）。上述的單位覆蓋、使用工具測量、計數單位數量，屬於測量的程序性知識；而了解測量屬性、待測物猶如一個完整的量（連續量），其內部被相同大小的基準單位所切割／組合，此單位化概念結合二維（與三維）空間脈絡的理解，屬於概念理解，亦為理解面積（Huang, 2015; Huang & Witz, 2011）與體積（Huang & Wu, 2019）測量公式的基礎。此外，能理解上述測量的概念、單位轉換及程序性知識，察覺幾何形／體的邊長、周長及其與面積（體積）之間的關係；推理思考形體物件因邊長改變而產生面積與體／容積量變易的情形；能運用心理單位做合理估測等，為應用與推理解題的高階層認知思考。

二、課綱的空間測量能力

（一）數學能力與素養的定義

九貫課程於 2001 年起施行，此課程強調協助學童發展數學智能及「帶著走」的能力（2008 年課綱，2010，頁 20）。此外，強調以學生為本位，養成精熟演算、抽象思考、推論與溝通能力，學習應用問題的解題方法，並培養欣賞數學的態度與能力，尤其將演算、抽象及推論三種貫串的能力與數學知識的概念理解結合，成為此課綱的能力主軸（2008 年課綱，2010）。由此可見，知識認知、程序執行與應用推理解決問題能力養成，為九貫課程目標的要素，也是國內數測的能力向度。

近年來國際組織（例如：學生能力評量計畫，Programme for International Student Assessment, PISA）益發重視培養學生的數學素養，即能應用重要知識與技術的能力，使用有效的分析、推理與溝通，做計畫與解決多元情境問題（洪碧霞、張文宜，2015）。受素養導向的教育思潮啟發，十二年國教課綱（2018）以核心素養為課程發展主軸，重視發展學生的數學思考技能與正向態度。同時，理解表徵、資訊、表達溝通與合作解決問題尤需貫串整體的數學學習，使認知（求知、應用及推理）與賞識數學的情意態度，充分地展現於生活應用。上述的素養涵育歷程尤為培養學生空間測量知能與解決問題能力的重要基礎。

林永豐（2018）與洪詠善（2018）認為九貫課綱以能力培養為導向；十二年國教課綱的目標強調涵育核心素養，兩套課綱對於能力概念脈絡是相近的。十二年國教課綱承續九貫課綱的能力概念脈絡，更強調跨領域、脈絡地應用實踐，展現於知識、技能、態度、價值與素養。換句話說，除了培養數學知識認知與問題解決能力以外，從做數學、應用解題中察覺數學規律，體認數學的實用價值，涵養欣賞情意與活用數學的能力（十二年國教課綱，2018）。因此，素養內涵較能力廣泛。

（二）空間測量在課綱的能力指標與學習表現內涵

針對空間測量主題，九貫課綱羅列各主題的能力指標（2008 年課綱，2010）；十二年國教課綱（2018）陳述的學習表現，各類測量所包

含的概念與程序性知識內容，兩套課綱存有相似與差異之處。茲將兩套課綱在空間測量的能力指標與學習表現條目對照，呈如表 1 所示。

從表 1 可見，空間測量在九貫課綱跨屬數與量、幾何與代數（使用符號表示公式）主題；在十二年國教課綱則跨屬數與量、空間與形狀及關係，除了以符號表述公式以外，並強調理解、觀察數量關係以推理解題。細究各學習階段的分年細目詮釋與教學實施要點（學習內容條目）及說明，兩套課綱皆重視認識各類測量性質、單位與測量工具的使用、實測操作、比較與計算能力，能理解各類測量公式與不同測量的關係（例如：形體物件的周長與面積、體積的關係；體積、容量與容積的關係等），進而應用解題。

在測量估測方面，九貫課綱提出能做長度的簡單估測（N-1-09），但是對於其他測量的估測則僅概括式地陳述——能做量的簡單估測（N-2-26），未明述培養量感與估測。相較於九貫課綱所強調的測量能力，十二年國教課綱益發強調應用解題能力及培養各類測量的量感與估測能力。

表 1 九貫課綱及十二年國教課綱之空間測量能力指標與學習表現條目對照

九貫課綱之主題能力指標	十二年國教課綱之學習表現
I. 長度 N-1-08 能做長度的實測，認識「公分」、「公尺」，並能做長度之比較與計算。 N-1-09 能做長度的簡單估測。 N-2-14 能由長度測量的經驗，透過刻度尺的方式來認識數線，並標記整數。 N-2-17 能做長度的實測，認識長度常用單位，並能做長度之比較與計算。 N-2-25 能用複名數的方法處理相關的計算問題（不含除法）。 N-3-16 能認識導出單位並做簡單的應用。	I. 長度 n-I-7 理解長度及其常用單位，並做實測、估測與計算。 n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。 n-III-11 認識量的常用單位及其換算，並處理相關的應用問題。 II. 面積 n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。

(續)

表 1 九貫課綱及十二年國教課綱之空間測量能力指標與學習表現條目對照（續）

九貫課綱之主題能力指標	十二年國教課綱之學習表現
N-3-18 能由生活中常用的數量關係，運用於理解問題，並解決問題。 (A-3-02)	s-III-1 理解三角形、平行四邊形與梯形的面積計算。
II. 面積	s-III-2 認識圓周率的意義，理解圓面積、圓周長、扇形面積與弧長之計算方式。
N-2-21 能認識面積常用單位，並能作面積之比較與計算。	s-III-4 理解角柱（含正方體、長方體）與圓柱的體積與表面積的計算方式。
N-2-22 能理解正方形和長方形的面積與周長公式。(S-2-08)	
N-3-22 能運用切割重組，理解三角形、平行四邊形與梯形的面積公式。(S-3-06)	III. 體積
N-3-23 能理解圓面積與周長的公式，並計算簡單扇形面積。(S-3-07)	n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。
N-3-25 能計算正方體或長方體的表面積。(S-3-11)	n-III-12 理解容量、容積和體積之間的關係，並做應用。
III. 體積	s-III-3 從操作活動，理解空間中面與面的關係與簡單立體形體的性質。
N-2-23 能認識體積，並認識體積單位「立方公分」。	s-III-4 理解角柱（含正方體、長方體）與圓柱的體積與表面積的計算方式。
N-2-26 能做量的簡單估測。	
N-3-20 能理解正方體和長方體的體積公式。(S-3-05)	IV. 容量
N-3-21 能理解容量、容積和體積間的關係。	n-I-8 認識容量、重量、面積。 n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。認識體積。
N-3-24 能理解簡單直立柱體的體積為底面積與高的乘積。(S-3-10)	n-III-12 理解容量、容積和體積之間的關係，並做應用。
IV. 容量	
N-1-10 能認識容量、重量、面積（不含常用單位）。	V. 角度
N-2-18 能做容量的實測，認識容量常用單位，並能做容量之比較與計算。	n-II-9 理解長度、角度、面積、容量、重量的常用單位與換算，培養量感與估測能力，並能做計算和應用解題。
N-3-19 能認識量的常用單位及其換算，並用複名數處理相關的計算問題。	

(續)

表 1 九貫課綱及十二年國教課綱之空間測量能力指標與學習表現條目對照（續）

九貫課綱之主題能力指標	十二年國教課綱之學習表現
N-3-21 能理解容量、容積和體積間的關係。	s-II-4 在活動中，認識幾何概念的應用，如旋轉角、展開圖與空間形體。
V. 角度	VI. 幾何
N-2-20 能使用量角器進行角度之實測，認識度的單位，並能做角度之比較與計算。	s-I-1 從操作活動，初步認識物體與常見幾何形體的幾何特徵。
S-2-04 能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。	s-II-1 理解正方形和長方形的面積與周長公式與應用。
VI. 幾何	s-II-3 透過平面圖形的構成要素，認識常見三角形、常見四邊形與圓。
S-1-01 能由物體的外觀，辨認、描述與分類製簡單幾何形體。	s-III-5 以簡單推理，理解幾何形體的性質。
S-1-02 能描繪或仿製簡單幾何形體。	s-II-7 認識平面圖形縮放的意義與應用。
S-1-03 能認識周遭物體中的角、直線和平面。	VII. 關係
S-1-04 能認識生活周遭中平行與垂直的現象。	r-I-1 學習數學語言中的運算符號、關係符號、算式約定。
S-2-01 能認識平面圖形的內部、外部及其周界與周長。	r-II-2 認識一維及二維之數量模式，並能說明與簡單推理。
S-2-02 能透過操作，將簡單圖形切割重組成另一簡單圖形。	r-II-5 理解以文字表示之數學公式。
S-2-03 能理解垂直與平行的意義。	r-III-3 觀察情境或模式中的數量關係，並用文字或符號正確表述，協助推理與解題。
S-2-04 能透過平面圖形的組成要素，認識基本平面圖形。	
S-2-07 能理解旋轉角的意義。	
S-3-02 能透過操作、認識「三角形三內角和 180 度」與「兩邊和大於第三邊」的性質。	
VII. 代數	
A-3-06 能用符號表示簡單的常用公式。	

三、依九貫課綱發展的教科書空間測量教材分析

教科書導引學生認識文化中有價值的知識、程序與推理思考方法，也是教師實施課程的重要藍圖（Clements, 2002）。因此，教科書在空間測量教材的編製，包含：所提供的問題類型（例如：開放與封閉型問題）（Yang et al., 2017）、解題所需投入的認知思考層次（例如：概念理解、程序性知識與應用解題思考）（Smith III et al., 2013），將影響學生學習機會與學習成就（Hadar, 2017）。

Sisman 與 Aksu（2016）認為若學生使用的教科書其提供的概念理解與程序性知識問題不平衡，只偏重低認知層次的操作與數字計算等程序性知識問題，則可能導致高年級學生對測量公式理解不足或混淆周長、面積與體積測量概念與公式。Hadar（2017）分析八年級生的數學成就與解決數學教科書教學問題所需的理解層次，發現：學生使用提供較高層次概念理解問題的教科書，其數學成就優於使用較少高層次概念理解問題教科書的學生。

此外，Battista（2007）指出幾何概念輔助學生學習空間測量，尤其認知圖形的概念與三維的空間思考，尤能輔助學生推理測量公式，包含：周長與面積、體積的關係；面／體積測量公式的概念結構。而且，提供適當的靜／動態圖示表徵，亦有助學生理解平面與立體空間測量概念，以及測量公式的意義（Huang & Wu, 2019）。

學者們分析依九貫課綱發展的教科書之空間測量教材（徐偉民，2013；徐偉民、林美如，2009；徐偉民、董修齊，2012）指出：教科書內容反映以學習者為中心的理念；在概念內容的編排，乃依循課綱之目標設計，於低、中年級學習感官知覺的比較、直接比較、間接比較（使用個別單位複製某量與測量），進而使用普遍單位測量。在測量的程序性知識方面，使用各類刻度工具測量、運算與比較等技能，顯見提供真實或模擬情境引入；測量公式與計算之應用解題則於中、高年級的課程導入。上述的教材編製特質，對我國學生在多年來的國際性數學評量（例如：TIMSS 2007、2011、2015 等）優於多數參與國的學生，貢獻

值得肯定。惟 Clements (2002) 評論教科書出版業者關注其教材符合課程綱要與架構，但是教科書內容是否參混傳統「說教式的說明+練習」的呈現 (p. 602)，導致教材提供導向概念理解與高階思考發展的深化探索活動不足，猶值得課程研究者檢視、探討。例如，單元內容以文字描述、圖示問題，同時也羅列解題公式與算式填充，學生僅需將問題所陳述的數字填入空格，即可完成解題，無需探索思考。

有關測量教材是否平衡地提供概念理解與程序性知識問題，Ruwich 與 Huang (2018) 分析臺灣 3 大教科書出版業者發行之一年級數學教科書的長度單元（無周長），分類各版本的教學問題及其所強調的長度測量知識類型，結果發現：各版本教科書所提供的程序性知識問題數量（例如：使用工具實測長度與比較、複製長度單位的操作等），皆多於概念理解問題數量（例如：判斷長度測量結果的正確性、說明理由及單位的大小與覆蓋的數量關係）；兩類問題的數量差異，有的版本提供程序性問題數量為概念問題數量的兩倍。此研究結果顯示：長度測量教材偏重程序性知識。

在面積與體積測量教材方面，徐偉民（2013）探討數學教科書的問題類型之國際比較，分析樣本包含數與計算、周長與面積及列式與等式等 3 單元，研究結果顯示：臺灣依九貫課綱發展的教科書內容偏重記憶與精確使用程序答題的低認知層次問題，亦即強調基本概念、事實與運算程序的熟練。Huang (2017)、Huang 與 Witz (2011) 及 Huang 與 Wu (2019) 指出教科書的面／體積單元常將幾何形體概念與測量分離設計為個別單元，而且重視測量操作、公式介紹及套用公式計算解題，例如，教學問題呈現附有格子的長／正方形圖示，並以對話框陳述格子圖的行、列數量及將兩數字相乘的算式紀錄，說明長 \times 寬 = 長方形面積。上述舉隅呈顯直接教學模式，卻淡化公式蘊含的意義探索（長／正方形／體公式的行列矩陣結構）。

綜合上述，本研究探討兩方面的問題：（一）針對空間測量主題，學生在北市及國教院數學檢測的解題表現情形分別為何？（二）教科書面積與體積單元的教學問題類型與圖示表徵的數量比例為何？

參、研究方法

本研究使用文獻分析法及臺北市國民小學基本學力檢測網所公告 2007~2018 年的臺北市國民小學基本學力檢測計畫成果報告書（以下簡稱北市數測）（北教局，2007，2008，2009，2010，2011，2012，2013，2014，2015，2016，2017，2018，2019），以及國教院建置的學力檢測公布系統公告的 2010 年及 2012~2017 年學力檢測相關報告及說明（以下簡稱國教數測）（國教院，2010，2012，2013，2014，2015，2016a，2016b，2016c，2017a，2017b），分析接受九貫課程學生的空間測量能力。在教材分析方面，取用國內 3 大教科書出版業者依據九貫課綱發展的四、五年級數學教科書之面積與體／容積單元，分析教學問題類型與圖示表徵數量及比例。

一、學生的空間測量能力分析

國內的兩項數測具有以課程為本的評量性質。以下簡述數測報告、學生解題能力的定義、資料分類及題數統計原則。

（一）資料來源

依據北市數測報告（北教局，2007，2009，2010），此項檢測以選擇題為主；自 2007 年起，增加建構反應題。在施測年級方面，2006~2012 年以六年級生為主，於 2013~2018 年則以五年級生為對象。在學生數學能力分析上，2006~2009 年使用通過機率，估算每位學生答對每一題的機率；2010 年起，使用答對率，計算全體學生在每題的通過百分比。

北市數測於 2006~2012 年的試題，其解題所需的知識（能力）分類，乃參考美國全國教育進步測驗（National Assessment of Educational Progress, NAEP）的分類，將數學能力分為程序性知識、概念性了解與應用解題。程序性知識指各種計算算則與選用正確的程序解題；概念性了解指認識事實性知識與定義，能使用符號表示概念與解釋關係；應用解

題指使用習得的知識與策略，推理與判斷答案的合理性（北教局，2007，2017）。於2013~2018年的檢測乃使用國際評量TIMSS的數學認知向度——知識、應用與推理，取代先前的能力分類。知識向度指對數學基本事實知識的認識與熟悉，能回憶事實、計算、測量、分類或排序；應用向度指將理解的概念有效地應用、正確選擇方法解決問題；推理則指有系統地邏輯推論能力（林陳涌等人，2017）。

國教數測於2010~2017年的試題皆為選擇題（國教院，2017b），將解題所需的認知歷程，分類為概念理解、程序執行與解題思考，類似於美國NAEP評量分類；其中解題思考問題為綜合應用測量的概念與程序性知識解決問題（國教院，2012，2017b）。此檢測的施測對象跨二~五年級生，於2010與2012年施測四年級生；2013~2015年施測五年級生；2016、2017年施測對象包含二、三與五年級生。

（二）學生解題表現理想與低落的界定

依據九貫課程暫行綱要於第一學習階段（國民中小學九年一貫課程暫行綱要【暫綱】，2000）的課程施行成效訴求為「80%學生能夠學會」（頁143），即冀望此套課程提供80%以上的學生對每個階段的學習內容，都具有學習能力。基於上述課程施行成效訴求，而且數測的整體試題多屬中等難度或中等偏易（北教局，2007），例如，2010~2018北市數測的整體平均答對率皆達70%，2010~2017國教數測的整體答對率為55%~75%（平均答對率65%），因此，本研究將解題能力是否良好之區分基準，設定在解題通過機率或答對率60%，未達60%之題項，定義為解題表現不理想；通過機率或答對率介於60%~80%、80%以上者，分別定義為表現普通與良好。

（三）資料處理、分類與次數統計原則

在整理學生的解題表現上，彙整資料的程序與原則，說明如下。1.資料整理程序：作者先瀏覽各年度報告之評量架構（試題對應知識向度、能力指標、認知歷程、評量結果數據），繼而聚焦於數與量（量與實

測)、幾何與代數主題的試題,逐題依各測量屬性定義區分類項,並註記通過率低於 60% 之題項。2.區分類項:依據題幹陳述及解題標的區分評量類項。當題幹陳述以某類測量為脈絡,但解題標的為轉換測量單位與計算,非執行該測量解題,則歸類為單位轉換計算。例如,北市數測 2013 年報告的容量估測試題(原命名),但細究其問題解題需求,乃屬於容量單位的計算,故非列入測量估測類項。3.能力指標:兩類檢測所依據的課綱包含 3 種版本(暫綱,2000;國民中小學九年一貫課程綱要——數學學習領域(二版)【2003 年課綱】,2003;2008 年課綱,2010),於資料整理時,多數以成果報告所呈之指標為依據,但當發現少數有缺漏或錯誤,作者再分析試題性質與陳述,斟酌補充與修正。例如,修正國教數測 2010 年題本 I 的試題 Q23 及題本 II 的試題 Q20 之分年細目;補充 2013 年試題 Q4 與 Q25 的分年細目,修正 2017 年的分年細目碼。最後,將資料彙整製表。

在各評量類項試題與通過率低於 60% 的題數及平均通過率統計上,國教數測的資料分析,乃依各類項之試題題數及通過率低於 60% 的題數,分別加總題數並計算平均通過率。在北市數測資料統計方面,由於此數測成果報告,並非每年度報告皆提供逐一試題所屬的知識分類、能力指標內容對照表與解題通過機率(或通過率)之完整訊息,例如,2008 年與 2009 年的報告缺漏上述資料,故以報告內文所陳述的通過率呈現。受限於訊息缺漏,於進階彙整北市數測各評量類項資料表時,則無呈現題數數據。

二、教材的教學問題類型分析

本研究選用康軒版(楊瑞智,2014,2015a,2015b,2015c)、翰林版(江世真等人,2015;許瑛珍,2012,2013a,2013b)及南一版(李源順,2016a,2016b;黃金鐘,2014)發行的四、五年級教科書之面積、體/容積測量各 5 個單元,共 15 個單元為材料(參附錄 1)。單元內容的分析以教學問題為主(含自我挑戰或做做看等問題)。有視於圖形周

長概念與面積測量關係密切，而且學生常發生將兩概念混淆的問題（林碧珍、蔡文煥，2003），因此，四年級教科書面積單元所包含的周長教材，也納入分析。

在問題類型分類上，乃參考國內數測對於解題所需的認知層次之分類和 Smith III 等人（2013）所提的長度測量知識分類定義為架構，針對單元的教學問題與解題所需的知識性質，區分為概念理解（以下簡稱概念）、程序性知識（以下簡稱程序性）與應用解題（以下簡稱應用）問題等 3 類，進行分類、編碼、確認教學問題是否附圖示表徵及計數數量。茲將 3 類題型舉隅呈如表 2 所示。由表 2 可見，概念問題包含認識測量性質與語詞、單位與轉換原則；程序性問題包含測量操作與運算結

表 2 面積和體積單元教學問題類型、圖示表徵與舉隅

問題類型	問題舉隅
概念	1. 蘋果切開後，總體積有沒有改變？為什麼？（楊瑞智，2014，頁 57） 2. 1 立方公分相當於多少水量的體積？（江世真等人，2015，頁 45）
程序性	1. 要怎麼畫出平行四邊形的高？（圖略）量量看，同一個底上的高都一樣長嗎？（李源順，2016b，頁 86） 2. 算算看，右圖鋪色部分的面積是多少平方公分？（圖略）（楊瑞智，2015a，頁 90） 3. 用尺量出這張長方形卡片的邊長，再算算看，周長是幾公分？（圖略）（許瑛珍，2012，頁 67）
應用	1. 詩華的媽媽利用郵購型錄買東西，他想要買個比較大的收納箱。（圖略） 算算看，下面哪一個收納箱的體積比較大？（楊瑞智，2015b，頁 23） 2. 右邊形體的體積是幾立方公分？（圖略）還有沒有其他的作法？（黃金鐘，2014，頁 43）
圖示表徵	表徵待測形體的實物相片、圖形或立體圖。（不含人形插畫及文字方框） 例如：下方的積木圖。 「數數看，下面的形體是多少立方公分？」 

果：應用問題包含綜合應用上述兩類知識及推理判斷，例如，測量複合形、體的面（體）積。

三、資料分類的信度

為求資料分類與分析的正確與客觀性，在學生解題表現的分類信度上，作者依資料處理程序，整理兩類數測的空間測量各試題所屬的主題、題型、能力指標、通過機率（答對率）、學生解題表現摘述與試題舉隅，彙整成表，並經兩位研究助理依據數測報告核對彙整表。繼而，由兩位研究生分別分類數測報告資料，再與作者的分類結果做交叉比對資料分類的一致性。在教科書單元教學問題與圖示表徵的分類信度上，作者與一位研究生獨立分類 3 個版本各 4 個單元，分析分類者一致性、建立信度後，由作者完成後續單元的分析。

在學生解題表現的分類信度上，分類者一致性為 95%。在教科書教學問題與圖示表徵的分類者一致性方面，使用 Kappa 分析結果為 0.87， $p < 0.01$ 。

肆、研究結果

一、北市數測分析結果

經彙整北市數測 2006~2009 年六年級生的解題通過機率、2010~2012 年六年級生的答對率，以及 2013~2018 年五年級生的答對率資料，研究結果發現：（一）在旋轉角與角度測量及三角形內角和為 180 度、計算長／正方形周長、簡單的面積與體積計算、長度單位的轉換與計算等類項上，六年級生解題通過機率（答對率）皆達 60%，而且在 2006 年與 2007 年的旋轉角與角大小比較的解題通過機率更達 80%~92%。（二）分析 2006、2007 年六年級生解題通過機率低於 60% 的類項及其對應的能力指標（2003 年課綱），包含：「單位轉換與計算」（N-2-16）、「體積測量」（N-2-18）及「面積測量」（S-2-08），尤其體積測量解題表現

低落的現象，持續見之於 2008、2009 年。整體而言，六年級生善於使用程序性知識解題，此技能優於解決概念題型能力（例如：繪圖說明面積公式）；學生於統合上述兩種知識以應用解題，表現最低落。

進一步分類北市數測的測量類項試題，可區分為 7 類項——「周長與邊長及其與面、體積的關係」、「面積測量」、「體積的意義與測量及容積計算」、「體積與容量的關係」、「旋轉角的意義、角度測量與比較」與「單位轉換與計算」，以及「測量估測」。茲將六年級生於 2008~2012 年及五年級生於 2013~2018 年檢測答對率低於 60% 的類項及其能力指標，呈如表 3 所示。

從表 3 可見：於 2008~2012 年檢測的類項及其能力指標（2003 年課綱），六年級學生在下列 3 類項的解題表現呈多年（3 個年度）低落現象：「體積的意義與測量及容積計算」（N-2-17）、「體積與容量的關係」（N-2-18）及「單位轉換與計算」（N-2-15, N-2-16）。此外，六年級生在「周長與邊長及其與面、體積的關係」（N-2-17, N-2-18，例如，長／正方體邊長總和與體積的關係）及「面積測量」（N-2-17, N-2-19），表現亦呈低落現象。六年級生解題通過率未達 60% 的問題所包含的能力指標多為 N-2-15~N-2-18。

同時，表 3 也顯示：五年級學生在使用量角器測量角度及角度計算等題項，通過率多數可達 70% 以上，而且在比較面積與體積大小等題項，解題通過率多數可達 60% 以上。相對地，五年級生表現不理想的類項及其能力指標（2008 年課綱）包含：「周長與邊長及其與面、體積的關係」（N-2-22, S-2-01）、「面積測量」（N-2-22）、「旋轉角的意義、角度測量與比較」（S-2-07）、「單位轉換與計算」（N-2-25），其通過率呈現多年未達 60%。此外，在「體積的意義與測量及容積計算」（N-2-23，2016 年的檢測）及「測量估測」（N-1-09, N-2-26）上，五年級生的通過率也未達 60%。

比較北市五、六年級學生解題表現低落的類項，兩個年級多所相似。尤其，測量估測僅於 2010 年、2014 年及 2015 年檢測，五、六年級生的通過率為 37%~52%。上述結果寓含學生的學習瓶頸訊息——五

表 3 2008~2018 年臺北市學生答對率低於 60% 的類項、答對率及對應之能力指標

年度	年級	周長與邊長及其與面、體積的關係	面積測量	體積的意義與測量及容積計算	體積與容量的關係	旋轉角的意義、角度測量與比較	單位轉換與計算	測量估測
2008	六	-	-	27% (N-2-17)	-	-	-	-
2009	六	50% (N-2-18); 54% (N-2-17)	-	34% (N-2-17)	-	-	-	-
2010	六	54% ¹ (N-2-17)	-	-	44% (N-2-18)	-	33% (N-2-18) ~ 57% (N-2-16)	57% (N-1-17)
2011	六	-	55% (N-2-17) ~ 57% ¹ (N-2-17)	24% (N-2-17)	18% ¹ (N-2-18); 43% (N-2-18)	58% (S-2-05)	26% (N-2-16); 33% (N-2-15)	-
2012	六	-	54% ¹ (N-2-19)	-	39% (N-2-18)	-	51% (N-2-15) ~ 54% (N-2-16)	-
2013	五	-	59% ¹ (S-1-05)	-	-	58% (S-2-05)	51% (N-2-15)	-
2014	五	-	29% ¹ (N-2-17)	-	-	51% (S-2-05)	47% (N-2-15)	37% (N-1-17)
2015	五	37% (N-2-22); 48% (N-2-22)	52% ¹ (N-2-22)	-	-	-	-	52% (N-1-09; N-2-26)
2016	五	-	-	40% (N-2-23)	-	50% (S-2-07)	31% (N-2-25) ~ 48% (N-2-17)	-
2017	五	27% (N-2-22)	-	-	-	-	53% (N-2-25)	-
2018	五	21% (N-2-22) ~ 59% ¹ (S-2-01)	-	-	-	-	-	-

註：1.¹表示建構反應題且其通過率為得 2 分和 1 分的百分比之總和；2.2008~2014 年數測以 2003 年課綱為架構；2015~2018 年數測以 2008 年課綱為架構。

年級學生能力低落的測量類項，其對學生解題具有難度，而且此種挑戰持續影響更高年級階段的解題表現。

二、國教數測的分析結果

2010~2016 年國教數測的受測對象包含低、中年級學生，檢測體積與容積的題數較北市數測少，而且無估測問題。國教數測的測量試題，可區分為 5 類項：「長度與周長」、「面積測量」、「體積測量」、「角的實測與比較」及「單位轉換與計算」。此外，2016 年之前的檢測以 2003 年課綱為架構，2008 年課綱則為 2016、2017 年檢測的架構。學生在各類項問題的解題通過率分別陳述如下。

在「長度與周長」上，學生的平均通過率為 62%，而且在認識長度與實測的通過率皆達 60% 以上；但是在程序執行與解題思考的題項通過率則未達 60%，例如，2016 年的二年級學生報讀始點非「0」的刻度尺之物件長度（N-1-08, N-1-09）；三、四年級學生解決正／長方形周長與邊長的運算及判斷算式紀錄（N-2-17, S-2-01），皆表現低落。整體而言，學生在此類項上解題低落的題型，僅呈現於解題思考類（2 題）與程序執行類型（3 題）。此顯示：低與中年級學生認識長度與周長，但將所識知的概念應用於長度與周長測量之解題，能力尚有不足。

在「面積測量」上，學生的平均通過率為 57%，解題表現較低落的問題及其能力指標包含：周長概念及其與面積的關係（2003 年課綱之 N-2-17, N-2-19, S-2-01, S-2-07）、長方形面積公式及其算式紀錄意義（N-2-21, S-2-02，例如：2016 年的三年級檢測）、理解圖示表徵、應用幾何圖形與面積概念測量面積和表面積（N-3-25，例如：2016 年的五年級檢測）、判斷面積測量的算式紀錄（N-2-22, N-3-22, S-3-06，例如：2017 年的檢測），以及應用最大公因數概念推理解決面積相關問題。同時，在面積測量的 3 種類型問題上，學生皆有解題表現低落的現象，以解題思考類的題數最多（9 題）；在概念類與程序執行類表現低落的題數相當（2 題）。

在「體積測量」上，學生的平均通過率為 62%，而且二與四年級生在比較容量、認識體積及其單位，通過率皆可達 60% 以上；但是五年級生在體積測量及其與容積的關係（2003 年課綱之 N-2-18）、解讀長方體的二維展開圖並求算體積（2008 年課綱之 N-3-20, N-3-25, S-3-05, S-3-11）等類項，解題表現不理想。此結果顯示：低、中年級學生認識體積及測量正／長方體體積的公式，但是於高年級運用空間推理、理解圖示表徵、進而使用程序性知識解題，則能力低落。同時，學生在體積測量的解題思考、概念及程序執行問題，表現低落的題數皆相同（1 題）。

在「角的實測與比較」上，學生的平均通過率為 69%，而且三、四年級學生善於比較角的大小並使用量角器測量角度，惟在需理解旋轉角意義以比較不同大小的鐘面上指針所形成的角度（N-2-20, S-2-04，2016 年的檢測），表現不理想。五年級學生在認識三角形內角和為 180 度的表現上，皆達 60% 以上的通過率。全體學生在角度測量的 3 類問題，表現低落的現象只呈現在概念問題（1 題）。

在「單位轉換與計算」上，學生的平均通過率為 61%，表現較低落的問題包含：轉換大長度單位（例如：公里與公分，2003 年課綱之 N-2-15）、大的面積及體積（例如：平／立方公尺與平／立方公分及地積）單位的轉換（2003 年課綱之 N-2-15, N-2-16）。此外，學生解決長度問題的能力優於解決面積與體積問題；在程序執行類表現低落的題數（4 題），多於概念類（3 題）與解題思考類（1 題）的題數。

茲將 2010~2017 年各類項的總題數、學生通過率低於 60% 的題數與通過率，以及在各類項通過率未達 60% 的題數占其類項總題數的百分比，彙整如表 4 所示。表 4 顯示：學生解題通過率未達 60% 的百分比由高而低排列為：「面積測量」（54%），「單位轉換與計算」（40%），「體積測量」（38%），「長度與周長」（32%），「角的實測與比較」（25%）。由此可見，面積與體積測量、單位轉換與計算問題，對中、高年級學生具有高挑戰性；學生在長度與周長及角的測量表現雖優於其他類項，但仍有 25%~32% 的題數通過率低於 60%。學生解題表現較低落的問題其所包含的能力指標（2003 年課綱）為：理解周長、面積與

表 4 學生在國教數測通過率低於 60% 之類項、題數、通過率與對應的能力指標

年度	年級	長度與周長		面積測量		體積測量		角的實測與比較		單位轉換與計算			
		總題數	< 60% 之題數 通過率	總題數	< 60% 之題數 通過率	總題數	< 60% 之題數 通過率	總題數	< 60% 之題數 通過率	總題數	< 60% 之題數 通過率		
2010	四	6	1 41% (N-2-17)	3	2 54% (N-2-17); 57% (N-1-15, N-1-16)	1	0	-	7	3	-	7	2 39% (N-2-15)
2012	四	3	1 54% (N-2-17)	1	0	0	0	-	0	0	-	3	1 43% (N-2-15, N-2-16)
2013	五	0	0	4	3 11% (N-2-04, N-2-17) ~ 51% (N-2-19)	2	1	54% (N-2-18)	0	0	-	2	2 39% (N-2-15, N-2-16); 48% (N-2-15, N-2-16)
2014	五	0	0	6	2 54% (N-2-17); 55% (N-2-19)	0	0	-	1	0	-	2	1 57% (N-2-15, N-2-16)
2015	五	0	0	2	2 41% (N-2-19); 43% (N-2-19)	1	0	-	1	0	-	2	0
2016	二	4	1 59% (N-1-08, N-1-09)	0	0	1	0	-	0	0	-	0	0
	三	3	1 34% (N-2-17)	3	1 49% (N-2-21)	0	0	-	2	1	53% (N-2-20)	0	0
	五	0	0	2	1 28% (N-3-25)	1	1	59% (N-3-21)	2	0	-	2	1 52% (N-3-19)
2017	三	2	1 47% (N-2-17)	1	0	0	0	-	2	0	-	1	0
	五	1	1 23% (N-3-19)	2	2 34% (N-3-22); 49% (N-2-22)	2	1	31% (N-3-20)	1	0	-	1	1 53% (N-3-19)
小計		19	6	24	13	8	3		16	4		20	8
< 60% 之題數占 總題數之百分比		32%		54%		38%		25%		40%			

註：1. 數與量的能力指標與幾何主題指標相同時，僅呈現數與量指標；2. 「< 60%」表示通過率低於 60%。

體積公式 (N-2-17, N-2-19) 及大的長度、面積及體積單位轉換 (N-2-15, N-2-16) 等問題。

統整上述結果，雖然兩項數測試題未盡相同，高年級學生解題能力低落的類項呈相似性。學生在理解面積、體積與容積測量及其關係，以及單位轉換與計算等能力顯得較低落，對於隱含 2003 年課綱之能力指標 N-2-15~N-2-19 之問題解決，表現不理想，尤其在隱含指標「N-2-17 (S-2-07) 能理解長方形面積、周長與長方體體積公式」(類似 2008 年課綱之 N-2-22 (S-2-08) 與 N-3-20 (S-3-05)) 之問題，通過率低於 60% 的次數最高。

三、教科書單元教學問題類型分析結果

分析 3 個版本教科書面積及體／容積單元教學問題類型、題數、百分比及圖示表徵數量，呈如表 5 所示。從表 5 可見，3 個版本所提供的程序性問題百分比最高，約為 42%~48%；次而概念問題，其百分比約為 29%~38%；應用問題百分比最低，約為 19%~25%。進一步分析各版本提供的概念、程序性及應用問題之比例，南一版約為 1：2：1；康

表 5 各版本教科書面積與體積單元各類教學問題題數、百分比及圖示表徵的數量

版本	概念			程序性			應用			單元題數			圖示表徵		
	面積	體／容積	小計	面積	體／容積	小計	面積	體／容積	小計	面積	體／容積	小計	面積	體／容積	小計
南一	23 (21%)	41 (38%)	64 (29%)	50 (45%)	50 (46%)	100 (46%)	37 (34%)	17 (16%)	54 (25%)	110	108	218	58	82	140
康軒	29 (28%)	60 (46%)	89 (38%)	46 (43%)	53 (41%)	99 (42%)	31 (29%)	17 (13%)	48 (20%)	106	130	236	66	90	156
翰林	20 (23%)	43 (43%)	63 (33%)	44 (50%)	47 (46%)	91 (48%)	24 (27%)	11 (11%)	35 (19%)	88	101	189	48	76	124

軒版約為 2 : 2 : 1 ; 翰林版約接近 2 : 3 : 1 。由此可見，教科書的面積、體／容積教材偏重程序執行的知識。

細究 3 個版本單元內容，概念問題多數為介紹周長、面／體積的測量公式、單位轉換與比較測量結果。解決概念問題固然需認識測量語詞、單位及其代表的量，回憶事實性知識，但少有要求說明、比較不同測量的屬性，以及如何因應問題情境需求以選用適當的測量方法之問題。在程序性問題方面，3 個版本的問題偏重提供圖形（或邊長），使用數字與測量公式執行計算；鮮少討論測量程序所潛存的概念及步驟的先後關係等。

在應用類型方面，3 個版本提供的題型多為應用測量公式解題的文字題與複合圖形的面／體積問題。解決上述問題雖然需要應用幾何形／體概念、重組圖形與公式等較高認知層次思考，但是問題偏向虛擬式情境設計，少有連結真實情境以探索與應用思考，例如，如何應用不同的測量知識規劃教室空間的布置、校園角落的場地布置、判斷收納箱的空間大小等問題。應用測量知識於生活情境中的空間探索與解題思考類型的問題，3 個版本提供的數量寡少。此外，各版本鮮少提供測量估測及如何使用參照單位估測周長、面積與體／容積的問題，例如，檢視本研究分析的單元，有的版本無提供或僅提供 1~2 題估測面積的問題，但皆無估測體／容積的問題。

在圖示表徵方面，各版本皆針對教學問題提供相應的幾何圖形或實物相片。依據表 5 分析各版本提供的圖示表徵總數占其教學問題總數之百分比，南一版、康軒版與翰林版的百分比分別為 64%、66% 與 66%。

伍、討論與建議

本研究使用北教局及國教院的數測報告，分析接受九貫課程的學生在解決空間測量問題上的能力，以及依九貫課綱發展的教科書之面積與體／容積單元的教學問題類型。依據兩大型數測報告分析結果，學生在

空間測量主題的能力表現未盡理想。一、北市數測的分析結果顯示：

(一) 六年級生在 2007~2009 年檢測的體積測量能力，呈多年低落，而且在「體積的意義與測量及容積計算」、「體積與容量的關係」及「單位轉換與計算」類項低落的現象，持續見之於 2010~2012 年的檢測。

(二) 五年級生在 2013~2018 年檢測的「周長與邊長及其與面、體積的關係」、「面積測量」、「旋轉角的意義、角度測量與比較」、「單位轉換與計算」等類項，呈多年通過率未達 60%。

(三) 五、六年級生在 2010 年、2014 年、2015 年檢測的「測量估測」類項，通過率皆未達 60%。

二、分析國教數測的結果，發現：

(一) 學生在「面積測量」的平均通過率 (57%) 最低；其他測量類項平均通過率為 61%~69%。

(二) 學生在「角的實測與比較」之平均通過率最高，但在旋轉角問題的通過率則低於 60%。

統整數測的分析結果，顯示：學生在面積與體／容積測量表現低落，通過率低於 60% 的問題次數以包含能力指標 (2003 年課綱)「N-2-17 (S-2-07) 能理解長方形面積、周長與長方體體積公式」(類似 2008 年課綱之 N-2-22 與 N-3-20) 最高。

分析教科書面積與體／容積單元的教學問題類型結果，發現：3 個版本皆重視提供圖示表徵輔助學生學習，約有 64% 以上的教學問題提供圖形或相片。各版本提供程序性問題百分比最高 (40% 以上)，次而概念問題 (30% 以上)，應用問題的百分比則偏低 (約 19%~25%)。

綜合研究結果，針對學生的空間測量能力與教科書面積與體／容積教材編製，提出相關討論與建議，以提供發展十二年國教課綱的空間測量課程參考。

一、學生的空間測量能力

比較學生解決測量的 3 種類型問題之能力，北市六年級生善於執行程序性知識解題，但是當問題情境需統合多重測量概念、理解圖示表徵以推理應用解題時，則能力相對低落 (北教局，2007，2008，2009，2010，2012)，例如，推理圖形的周長、邊長及其與面／體積的關係；北市五年級生的應用解題能力也較解決概念、程序性問題低落 (北教

局，2018，2019）。同時，國教數測分析結果發現：低、中年級學生對於測量長度與周長具有能力，但是面對需統整正／長方形（或正／長方體）周長、面積與體積概念以推理解題時，高年級生則表現不理想。

上述結果顯示：學生具有測量知識，在知識認知類型問題的解題能力優於應用與推理問題之解題表現，此呼應林陳涌等人（2017）、張俊彥等人（2018）及張俊彥等人（2012）分析四年級生在 TIMSS 2007，2011，2015 的施測結果。雖然各國學生在 TIMSS 的推理領域表現普遍較弱，但值得注意的是，相較於亞洲表現優良的國家（例如：韓國、日本、香港與新加坡），我國學生推理思考表現顯得落後且進步的程度有限（張俊彥等人，2018）。

有關學生在測量的應用與推理能力較低落現象，以下針對解題思考的複雜性及教材層面（容後討論）提出說明。在解題思考的複雜性方面，欲成功地解決應用問題，學生需充分理解各類測量屬性、單位概念（例如：十進位概念及單位的化與聚關係）、程序性知識（測量操作與運算技能），運用空間思考與數量關係推理，其解題難度較直接使用事實性知識與單一步驟解題高（Venenciano & Dougherty, 2014）。同時，本研究發現：當問題的認知層次相同，學生的能力可能因解題所需的思考與程序複雜度不同，而表現呈差異。例如，單位轉換與計算類項多屬執程序性知識的問題，在此類項上，學生解決長度問題的表現，優於解決面積、體積與容量問題；然而，在解決長度的二階單位關係與運算的通過率仍低於 60%。上述結果，亦可輔以說明解題複雜度對解題表現的影響。

有關解題平均通過率較高的類項（例如：角度測量）與較少被檢測的類項（例如：估測），學生的解題能力是否有需再強化之處？從國內數測的分析結果發現：學生善於比較圖形角大小與使用量角器測量角度，但是對於理解旋轉角意義與解題則不理想，此現象呼應黃幸美與塗舒敏（2019）及 Huang 等人（2018）的研究結果。呈如 Mitchelmore 與 White（2000）指出角的概念抽象，於建構旋轉角概念時，需利用圖形角概念理解角的邊因張開或旋轉某程度，而形成動態角。在測量估測方

面，雖然國教數測無包含此類試題，但從北市數測結果顯示高年級生的測量估測能力不足，此結果也呼應黃幸美（2016）調查接受九貫課程的五、六年級學生（ $N = 948$ ）估測長度、面積與體積能力的結果——高年級生的長度估測能力優於其他兩類，但是五、六年級生整體測量估測的通過率，分別約為 43%（五年級）與 50%（六年級）。使用所認知的單位對待測物進行心理截割與量的估計，估測歷程包含高階的測量思考與量的推理，此能力發展乃植基於測量知識與經驗（Joram et al., 2005; Joram et al., 1998），因此，如何估得合理為學生的一種挑戰。此外，後文將從教材所提供學習機會的層面，提出學生能力低落的理由說明。

二、教材編製與學習機會

Battista（2007）、Battista 與 Clements（1996）及相關研究（Huang & Witz, 2011; Huang & Wu, 2019），指出學生學習面／體積測量時，提供空間幾何脈絡有助測量概念理解。本研究發現教科書的面積、體／容積單元提供充分的平面與立體圖示，但是教材在整合相關的幾何概念（例如：平面圖形與立方體的幾何性質與結構關係）不足，而且偏重程序執行問題。有的版本提供程序性問題數量約為概念問題數量的 1.5~2 倍，且兩類題數約為應用題數的兩倍或以上，此現象類似 Ruwisch 與 Huang（2018）在長度測量教材的分析結果。

本研究發現教科書所提供概念、程序性類型的問題，多為使用測量事實性知識與單步驟計算解題；少有開放性討論問題、比較不同測量方法與判斷其合理性，以及理由說明等需較高階認知思考的問題，此亦呼應徐偉民（2013）及 Yang 等人（2017）的研究結果。解決應用推理問題，需要認識測量性質並理解測量程序所潛存的概念結構；當教材缺乏統合應用概念、程序性知識以探索解題的學習機會，將導致學生難以充分掌握測量知識，負面影響其應用解題思考。

Hadar（2017）指出教科書提供的問題類型與數量多寡，為影響學生解決不同認知層次問題表現的因素。若面／體積測量教材偏重知識記憶與低認知層次的操作與計算，淡化測量與空間概念連結、測量公式意

義探索，將導致學生理解公式及解決高認知層次問題（應用推理）的能力不足（Huang, 2017; Huang & Witz, 2011; Sisman & Aksu, 2016）。然而，本研究報告僅就學生的空間測量解題能力及教科書的面／體積教材分析實況，欲了解測量教材的編製對學生學習成就的影響，猶需未來深入探討。

在角度測量方面，依九貫課綱發展的教科書完整地介紹量角器與角度測量步驟，但針對旋轉角意義的介紹，則多使用象徵雙邊角（圖形角）特徵的情境（例如：扇子由合著到打開的歷程或鐘面指針的旋轉）；當學生未能掌握旋轉角意義時，傾向使用圖形角的概念辨識旋轉角（黃幸美、塗舒敏，2019；Huang et al., 2018）。日常生活中多有單指針旋轉的情境（例如：單指針的磅秤），可利用以激發學生思考如何運用心理意象、自行建構單邊角隱而未見的另一邊，藉比較指針旋轉前、後的角度差異（White & Mitchelmore, 2010），或藉肢體動作經驗角的旋轉與張開程度，強化學生理解旋轉角的意義。當角單元缺乏上述的角情境，學生可成功地辨識雙邊角特徵明顯的情境中的角（例如：交會的路徑），但應用心理意象以辨識旋轉角的能力則呈顯不足。

在測量估測方面，教科書單元強調測量的實測技能與計算（徐偉民、林美如，2009；徐偉民、董修齊，2012）；但是鮮少提供面積與體積測量的估測活動（謝佳純，2016）。當測量估測的學習機會匱乏，也可能導致學生的空間量感薄弱，負面影響其估測能力（黃幸美，2016）。此外，Ruwisch 與 Huang（2018）發現教科書的長度估測活動，多提供使用身體部位或物件直接比對待測物的動作（或圖例引導間接測量），缺乏強調估測者建構參照單位長度，使用心理單位估測待測物。上述的間接測量方式，其估測的歷程雖無使用工具實測，但因少有使用心理單位測量的運作，對於建立空間量感，助益有限。教科書的估測教材匱乏，可能受九貫課綱以量的簡單估測粗略地概括陳述能力指標，影響課程編製者的關注程度，抑或教材設計者缺乏估測問題設計的經驗，值得進一步探討。

陸、結論、建議與研究限制

經分析國內數測報告，發現接受九貫課程的國小學生在面積、體積測量及測量估測能力宜再強化，而且在應用推理性質的問題，解題能力遜於使用概念及程序執行的能力。依九貫課綱發展的教科書面積與體／容積單元，約 64% 以上的教學問題提供圖示表徵，惟教材偏重測量事實知識及程序執行的問題，應用推理的問題較少。雖然教學實務為影響課程施行成效的重要因素（Tarr et al., 2008），但是學生的測量與估量能力低落及教材偏重程序性知識問題的現象，值得課程與教學研究及實務工作者關注。依據研究結果，提出以下建議以供課程與教學研究及實務工作者參考。

一、幾何形體的概念與空間推理為解決空間測量問題的重要橋梁，此心理運作有助統整視覺感官與操作經驗所建構的空間知覺（Battista, 2007; Hawes et al., 2017），裨益理解幾何及其數量化的抽象概念（例如：旋轉角意義、測量公式等），以及量感的建立。新課程的空間測量教材宜統合幾何概念與測量知識，並用實物操作與幾何輔助軟體（例如：Cabri 幾何軟體）（Huang & Wu, 2019），藉教學問題導引學生注意測量單位（十進位概念理解與運算）、比較與待測的量與整體的關係（Venenciano & Dougherty, 2014），有系統地導引深化探索不同測量之間的關聯性，包含：量的比較與測量單位大小的關係、不同測量之間的關係（例如：周長與面／體積的關係；面積與體／容積的關係）。教材提供探索情境問題，讓學生應用測量技能、單位轉換與化聚計算，建立量感以輔助判斷，藉此種應用解題的經驗，導向察覺數學規律與賞識應用價值。上述各類測量的探索教材具有培養較高階的認知思考能力與情意涵養意義，課程設計者宜兼顧課程設計的原理原則，多利用學生生活真實情境為脈絡，設計開放式探索問題，以縮減概念、程序性知識及應用問題的數量差異。

二、將測量估測融入實測活動，藉單位化的概念建構及量的比較活動，建立各類測量的量感，裨益估量的心理運作能力之發展（Joram et al., 2005）。

三、學生能理解解題紀錄並判斷數學思考的正確性，為結合概念與程序性知識及數學判斷的綜合思考能力（Huang, 2017; Huang & Witz, 2011）。為強化學生測量知識的概念理解與推理應用，國教院與北市學力檢測資料庫提供學生解題想法分析，誠為課程設計者提供學生數學想法的參考資源。

在研究限制方面，本研究報告接受九貫課程學生的空間測量能力及教科書單元分析，惟受研究樣本的地區限制（例如：臺北市學生）、評量結果資料未齊全（例如：國教數測缺 2011 年評量結果資料），以及學生的數學成就尚受教學及學習情境等因素影響（Tarr et al., 2008），研究結果無法直接推論學生成就與教科書內容的關聯性。在教科書分析方面，本研究未包羅所有的空間測量單元（例如：表面積及大單位的面積與體積單位）。未來探討學生數學成就與教材內容的關係，宜再使用學生在國內數測的分數資料與教科書所有的空間測量單元，進行量化分析，將有利建構兩個變項之間的關聯性。

致謝

感謝兩位匿名審查委員的審查建議，使本文益臻完美，同時也感謝劉家均老師及廖璿老師在資料整理與分析上的協助。

教科書參考書目

江世貞、房昔梅、蕭雅霜（主編）（2015）。國民小學數學備課用書（三版，第十冊，五下）。翰林。

[Chiang, S.-C., Fang, H.-M., & Hsiao, Y.-S. (Eds.). (2015). *Elementary school mathematics lesson planning book* (3rd ed., Vol. 10, 5th grade 2nd semester). Hanlin.]

李源順（主編）（2016a）。國民小學數學（初版，第八冊，四下）。南一。

[Li, Y.-S. (Ed.). (2016a). *Elementary school mathematics* (1st ed., Vol. 8, 4th grade 2nd semester). Nan I.]

李源順（主編）（2016b）。國民小學數學（初版，第九冊，五上）。南一。

[Li, Y.-S. (Ed.). (2016b). *Elementary school mathematics* (1st ed., Vol. 9, 5th grade 1st semester). Nan I.]

- 許瑛珍（主編）（2012）。國民小學數學備課用書（三版，第七冊，四上）。翰林。
[Hsu, Y.-C. (Ed.). (2012). *Elementary school mathematics lesson planning book* (3rd ed., Vol. 7, 4th grade 1st semester). Hanlin.]
- 許瑛珍（主編）（2013a）。國民小學數學備課用書（三版，第八冊，四下）。翰林。
[Hsu, Y.-C. (Ed.). (2013a). *Elementary school mathematics lesson planning book* (3rd ed., Vol. 8, 4th grade 2nd semester). Hanlin.]
- 許瑛珍（主編）（2013b）。國民小學數學備課用書（三版，第九冊，五上）。翰林。
[Hsu, Y.-C. (Ed.). (2013b). *Elementary school mathematics lesson planning book* (3rd ed., Vol. 9, 5th grade 1st semester). Hanlin.]
- 黃金鐘（主編）（2014）。國民小學數學備課指引教學篇（三版，第十冊，五下）。南一。
[Huang, C.-C. (Ed.). (2014). *Elementary school mathematics lesson planning book* (3rd ed., Vol. 10, 5th grade 2nd semester). Nan I.]
- 楊瑞智（主編）（2014）。國民小學數學教師手冊（初版，第七冊，四上）。康軒。
[Yang, J.-C. (Ed.). (2014). *Elementary school mathematics teacher's manual* (1st ed., Vol. 7, 4th grade 1st semester). Kang Hsuan.]
- 楊瑞智（主編）（2015a）。國民小學數學教師手冊（初版，第八冊，四下）。康軒。
[Yang, J.-C. (Ed.). (2015a). *Elementary school mathematics teacher's manual* (1st ed., Vol. 8, 4th grade 2nd semester). Kang Hsuan.]
- 楊瑞智（主編）（2015b）。國民小學數學教師手冊（初版，第九冊，五上）。康軒。
[Yang, J.-C. (Ed.). (2015b). *Elementary school mathematics teacher's manual* (1st ed., Vol. 9, 5th grade 1st semester). Kang Hsuan.]
- 楊瑞智（主編）（2015c）。國民小學數學教師手冊（三版，第十冊，五下）。康軒。
[Yang, J.-C. (Ed.). (2015c). *Elementary school mathematics teacher's manual* (3rd ed., Vol. 10, 5th grade 2nd semester). Kang Hsuan.]

參考文獻

- 十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校——數學領域（2018）。
[Curriculum guidelines of 12-year basic education: Mathematics domain for elementary, junior high school and upper secondary school education. (2018).]

- 十二年國民基本教育課程綱要總綱生效令（2017）。
- [*Curriculum guidelines of 12-year basic education: General guidelines effective order.* (2017).]
- 周筱亭、黃敏晃（主編）（2003）。國小數學教材分析——體積和角度。國立教育研究院籌備處。
- [Zhou, X.-T., & Huang, M.-H. (Eds.). (2003). *Guoxiao shuxue jiaocai fenxi: Tiji he jiaodou.* Preparation Office of National Academy for Educational Research.]
- 林永豐（2018）。延續或斷裂？從能力到素養的課程改革意涵。課程研究，13（2），1-20。http://doi.org/10.3966/181653382018091302001
- [Lin, Y.-F. (2018). Continuity or rupture? The implication of the debate of skills/capabilities and competencies for curriculum reform. *Journal of Curriculum Studies*, 13(2), 1-20. http://doi.org/10.3966/181653382018091302001]
- 林陳涌、任宗浩、李哲迪、林碧珍、張美玉、曹博盛、楊文金（2017）。國際數學與科學教育成就趨勢調查 2011 國家報告（修訂版）。國立臺灣師範大學科學教育中心。
- [Lin, C.-Y., Ren, T.-H., Lee, C.-D., Lin, P.-J., Chang, M.-Y., Tsao, P.-S., & Yang, W.-J. (2017). *Trends in international mathematics and science study 2011 national report* (Rev. ed.). National Taiwan Normal University Science Education Center.]
- 林碧珍、蔡文煥（2003）。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。科學教育月刊，258，2-20。http://doi.org/10.6216/SEM.200305_(258).0001
- [Lin, P.-J., & Tsai, W.-H. (2003). Fourth-grader's mathematics achievement in TIMSS 2003 field test. *Science Education Monthly*, 258, 2-20. http://doi.org/10.6216/SEM.200305_(258).0001]
- 洪詠善（2018）。素養導向教學的界定、轉化與實踐。載於蔡清華（主編），課程協作與實踐（第二輯，頁 58-74）。教育部中小學師資課程教學與評量協作中心。
- [Hung, Y.-S. (2018). Suyang daoxiang jiaoxue de jieding, zhuanhua yu shijian. In C.-H., Cai (Ed.), *Kechang xiezuo yu shijian* (Vol. 2, pp. 58-74). Jiaoyubu Zhongxiaoxue Shizi Kecheng Jiaoxue Yu Pingliang Xiezuo Zhongxin.]
- 洪碧霞、張文宜（2015）。緒論：臺灣 PISA 2012。載於臺灣 PISA 國家研究中心（主編），臺灣 PISA 2012 結果報告（頁 1-11）。心理。
- [Hung, P.-H., & Chang, W.-Y. (2015). Introduction: Taiwan PISA 2012. In Taiwan PISA National Center (Ed.), *Taiwan PISA 2012 national report* (pp. 1-11). Psychological.]
- 徐偉民（2013）。國小數學教科書數學問題類型與呈現方式之比較分析——以臺灣、芬蘭、新加坡為例。科學教育學刊，21（3），263-289。http://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2103.02
- [Hsu, W.-M. (2013). A comparison and analysis of the types and representations of mathematical problems in the elementary mathematics textbooks of Taiwan, Finland and Singapore. *Chinese Journal of Science Education*, 21(3), 263-289. http://doi.org/10.6173/CJSE.2013.2103.02]

- 徐偉民、林美如 (2009)。臺灣、中國與香港國小數學教科書幾何教材之內容分析。彰化師大教育學報, 16, 47-73。http://doi.org/10.6769/JENCUE.200912.0047
- [Hsu, W.-M., & Lin, M.-J. (2009). A content analysis of geometry materials in elementary mathematics textbook of Taiwan, China and Hong Kong. *Journal of Education National Changhua University of Education*, 16, 47-73. http://doi.org/10.6769/JENCUE.200912.0047]
- 徐偉民、董修齊 (2012)。國小幾何教材內容之比較：以臺灣與芬蘭為例。當代教育研究季刊, 20 (3), 39-86。http://doi.org/10.6151/CERQ.2012.2003.02
- [Hsu, W.-M., & Tung, H.-C. (2012). The content analysis of geometry material in the elementary mathematic textbooks of Taiwan and Finland. *Contemporary Educational Research Quarterly*, 20(3), 39-86. http://doi.org/10.6151/CERQ.2012.2003.02]
- 國民中小學九年一貫課程綱要——數學學習領域 (二版) (2003)。
[Curriculum guidelines of grade 1-9: Mathematics domain for elementary and junior high school education (2nd ed.). (2003).]
- 國民中小學九年一貫課程綱要——數學學習領域 (三版) (2010)。
[Curriculum guidelines of grade 1-9: Mathematics domain for elementary and junior high school education (3rd ed.). (2010).]
- 國民中小學九年一貫課程暫行綱要 (2000)。
[The provisional guidelines of grade 1-9 curriculum. (2000).]
- 國家教育研究院 (2010)。2010 年縣市學力檢測數學科測驗試題品質分析。
http://rap.naer.edu.tw/files/770864067.zip
- [National Academy for Educational Research. (2010). 2010nian xianshi xueli jiance shuxueke ceyan shiti pinzhi fenxi. http://rap.naer.edu.tw/files/770864067.zip]
- 國家教育研究院 (2012)。臺灣學生學習成就評量資料庫：協助縣市辦理學生學習能力檢測——國小四年級國語文及數學科試題解析及教學輔導建議。
http://rap.naer.edu.tw/files/121720639.zip
- [National Academy for Educational Research. (2012). Taiwan assessment of student achievement: Xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Guoxiao sinianji guoyuwen ji shuxueke shiti jiexi ji jiaoxue fudao jianyi. http://rap.naer.edu.tw/files/121720639.zip]
- 國家教育研究院 (2013)。2013 年國小五年級數學試題品質分析報告。http://rap.naer.edu.tw/files/86778838.zip
- [National Academy for Educational Research. (2013). 2013nian guoxiao wunianji shuxue shiti pinzhi fenxi baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/86778838.zip]
- 國家教育研究院 (2014)。2014 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——國小五年級國語及數學科試題解析及教學輔導建議。http://rap.naer.edu.tw/files/157274685.zip
- [National Academy for Educational Research. (2014). 2014nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Guoxiao wunianji guoyu ji shuxueke shiti jiexi ji jiaoxue fudao jianyi. http://rap.naer.edu.tw/files/157274685.zip]

- 國家教育研究院 (2015)。2015 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——國小五年級國語及數學科試題解析及教學輔導建議。http://rap.naer.edu.tw/files/170609305.zip
- [National Academy for Educational Research. (2015). 2015nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Guoxiao wunianji guoyu ji shuxueke shiti jieshi ji jiaoxue fudao jianyi. http://rap.naer.edu.tw/files/170609305.zip]
- 國家教育研究院 (2016a)。2016 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——數學二年級施測結果報告。http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip
- [National Academy for Educational Research. (2016a). 2016nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Shuxue ernianji shice jieguo baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip]
- 國家教育研究院 (2016b)。2016 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——數學三年級施測結果報告。http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip
- [National Academy for Educational Research. (2016b). 2016nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Shuxue sannianji shice jieguo baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip]
- 國家教育研究院 (2016c)。2016 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——數學五年級施測結果報告。http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip
- [National Academy for Educational Research. (2016c). 2016nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Shuxue wunianji shice jieguo baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/185554782.zip]
- 國家教育研究院 (2017a)。2017 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——數學三年級施測結果報告。http://rap.naer.edu.tw/files/2017施測結果報告.zip
- [National Academy for Educational Research. (2017a). 2017nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Shuxue sannianji shice jieguo baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/2017施測結果報告.zip]
- 國家教育研究院 (2017b)。2017 年協助縣市辦理學生學習能力檢測——數學五年級施測結果報告。http://rap.naer.edu.tw/files/2017施測結果報告.zip
- [National Academy for Educational Research. (2017b). 2017nian xiezhu xianshi banli xuesheng xuexi nengli jiance: Shuxue wunianji shice jieguo baogao. http://rap.naer.edu.tw/files/2017施測結果報告.zip]
- 張俊彥、任宗浩、李哲迪、宋曉玫、林碧珍、張美玉、陳冠銘、曹博盛、楊文金 (2018)。TIMSS 2015 國際數學與科學教育成就趨勢調查 2015 國家報告。國立臺灣師範大學科學教育中心。
- [Chang, C.-Y., Ren, T.-H., Lee, C.-D., Song, X.-M., Lin, P.-J., Chang, M.-Y., Chen K.-M., Tsao, P.-S., & Yang, W.-J. (2018). Trends in international mathematics and science study 2015 national report. National Taiwan Normal University Science Education Center.]
- 張俊彥、林碧珍、洪志明、曹博盛、張美玉、任宗浩、李哲迪 (2012)。TIMSS 2007 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告。國立臺灣師範大學科學教育中心。

- [Chang, C.-Y., Lin, P.-J., Hong, C.-M., Tsao, P.-S., Chang, M.-Y., Ren, T.-H., & Lee, C.-D. (2012). *Trends in international mathematics and science study 2007*. National Taiwan Normal University Science Education Center.]
- 張秋男、邱美虹、曹博盛、張美玉、羅珮華、林碧珍、蔡文煥、譚克平（2005）。**國際數學與科學教育成就趨勢調查2003**。國立臺灣師範大學科學教育中心。
- [Chang, C.-N., Chiu, M.-H., Tsao, P.-S., Chang, M.-Y., Lau, P.-H., Lin, P.-J., Cai, W.-H., & Tam, H.-P. (2005). *Trends in international mathematics and science study 2003*. National Taiwan Normal University Science Education Center.]
- 黃幸美（2016）。學童估測長度、面積與體積的表現與策略使用之探討。**教育科學研究期刊**，**61**（3），131-162。http://doi.org/10.6209/JORIES.2016.61(3).05
- [Huang, H.-M. E. (2016). Investigation of the performance and use of strategy among elementary school children in estimating measurements of length, area, and volume. *Journal of Research in Education Sciences*, *61*(3), 131-162. http://doi.org/10.6209/JORIES.2016.61(3).05]
- 黃幸美、塗舒敏（2019，9月20日）。學童的角概念與辨識角的表現之探討（論文發表）。2019 學習媒材與教學國際論壇——素養導向教學的學習媒材，臺北市，臺灣。
- [Huang, H.-M. E., & Tu, S.-M. (2019, September 20). *Investigation of elementary-school students' conception of angle and performance of identifying angles* [Paper presentation]. 2019 International Symposium on Learning Materials and Instruction: Learning Materials in Competency-based Teaching, Taipei, Taiwan.]
- 臺北市政府教育局（2007）。**臺北市國民小學95年度基本學力檢測計畫成果報告書**。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/61-臺北市國民小學095年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2007). *Taipeishi guomin xiaoxue 95 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogaoshu*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/61-臺北市國民小學095年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2008）。**臺北市國民小學96年度基本學力檢測成果報告書**。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/62-臺北市國民小學096年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2008). *Taipeishi guomin xiaoxue 96 niandu jiben xueli jiance chengguo baogaoshu*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/62-臺北市國民小學096年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2009）。**臺北市國民小學97年度基本學力檢測計畫成果報告書**。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/63-臺北市國民小學097年度基本學力檢測計畫成果報告書.html

- [Department of Education of Taipei City Government. (2009). *Taibeishi guomin xiaoxue 97 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogaoshu*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/63-臺北市國民小學097年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]
- 臺北市政府教育局（2010）。臺北市國民小學 98 年度基本學力檢測計畫成果報告書。 <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/64-臺北市國民小學098年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>
- [Department of Education of Taipei City Government. (2010). *Taibeishi guomin xiaoxue 98 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogaoshu*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/64-臺北市國民小學098年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]
- 臺北市政府教育局（2011）。臺北市國民小學 99 年度基本學力檢測計畫成果報告書。 <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/65-臺北市國民小學099年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>
- [Department of Education of Taipei City Government. (2011). *Taibeishi guomin xiaoxue 99 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogaoshu*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/65-臺北市國民小學099年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]
- 臺北市政府教育局（2012）。臺北市國民小學 100 年度基本學力檢測計畫成果報告。 <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/66-臺北市國民小學100年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>
- [Department of Education of Taipei City Government. (2012). *Taibeishi guomin xiaoxue 100 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/66-臺北市國民小學100年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]
- 臺北市政府教育局（2013）。臺北市國民小學 101 年度基本學力檢測計畫成果報告。 <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/67-臺北市國民小學101年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>
- [Department of Education of Taipei City Government. (2013). *Taibeishi guomin xiaoxue 101 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/67-臺北市國民小學101年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]
- 臺北市政府教育局（2014）。臺北市國民小學 102 年度基本學力檢測計畫成果報告。 <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/68-臺北市國民小學102年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>
- [Department of Education of Taipei City Government. (2014). *Taibeishi guomin xiaoxue 102 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. <http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/68-臺北市國民小學102年度基本學力檢測計畫成果報告書.html>]

- 臺北市政府教育局（2015）。臺北市國民小學 103 年度基本學力檢測計畫成果報告。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/2898-臺北市國民小學103年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2015). *Taipeishi guomin xiaoxue 103 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/2898-臺北市國民小學103年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2016）。臺北市國民小學 104 年度基本學力檢測計畫成果報告。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/4065-臺北市國民小學104年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2016). *Taipeishi guomin xiaoxue 104 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/4065-臺北市國民小學104年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2017）。臺北市國民小學 105 年度基本學力檢測計畫成果報告。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/5024-臺北市國民小學105年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2017). *Taipeishi guomin xiaoxue 105 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/5024-臺北市國民小學105年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2018）。臺北市國民小學 106 年度基本學力檢測計畫成果報告。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/5951-臺北市國民小學106年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2018). *Taipeishi guomin xiaoxue 106 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/5951-臺北市國民小學106年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 臺北市政府教育局（2019）。臺北市國民小學 107 年度基本學力檢測計畫成果報告。http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/6891-臺北市國民小學107年度基本學力檢測計畫成果報告書.html
- [Department of Education of Taipei City Government. (2019). *Taipeishi guomin xiaoxue 107 niandu jiben xueli jiance jibai chengguo baogao*. http://tebca.tp.edu.tw/downloads/歷年成果報告/file/6891-臺北市國民小學107年度基本學力檢測計畫成果報告書.html]
- 謝佳純（2016）。估測策略教學對國小四年級學童估測長度與面積表現之探討（未出版之碩士論文）。臺北市立大學學習與媒材設計學系課程與教學碩士班。

- [Hsieh, C.-C. (2016). *Study of effects of the estimation strategies instruction on fourth graders' performance in length and area estimations* [Unpublished master's thesis]. In-service Master Program of Curriculum and Instruction of Department of Learning and Materials Design, University of Taipei.]
- Askew, M., Hodgen, J., Hossain, S., & Bretscher, N. (2010). *Values and variables: Mathematics education in high-performing countries*. Nuffield Foundation.
- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Jr. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 843-908). Information Age.
- Battista, M. T., & Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292. <https://doi.org/10.2307/749365>
- Clements, D. H. (2002). Linking research and curriculum development. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 599-630). Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H., Barrett, J. E., & Sarama, J. (2017). Measurement in early and elementary education. In J. E. Barrett, D. H. Clements, & J. Sarama (Eds.), *Journal for research in mathematics education monograph 16: Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume* (pp. 3-21). National Council of Teachers of Mathematics.
- Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2017.10.002>
- Hawes, Z., Moss, J., Caswell, B., Naqvi, S., & MacKinnon, S. (2017). Enhancing children's spatial and numerical skills through a dynamic spatial approach to early geometry instruction: Effects of a 32-week intervention. *Cognition and Instruction*, 35(3), 236-264. <https://doi.org/10.1080/07370008.2017.1323902>
- Huang, H.-M. E. (2015). Elementary school teachers' instruction in measurement: Cases of classroom teaching of spatial measurement in Taiwan. In L. Fan, N.-Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese teach mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 149-184). World Scientific. https://doi.org/10.1142/9789814415828_0005
- Huang, H.-M. E. (2017). Curriculum interventions for area measurement instruction to enhance children's conceptual understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(7), 1323-1341. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9745-7>
- Huang, H.-M. E., Tu, S.-M., & Hsieh, C.-C. (2018, May 7-11). *Students' angle-related knowledge used for recognizing angles and solving problems* [Paper presentation]. The 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan.
- Huang, H.-M. E., & Witz, K. G. (2011). Developing children's conceptual understanding of area measurement: A curriculum and teaching experiment. *Learning and Instruction*, 21(1), 1-13. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2009.09.002>
- Huang, H.-M. E., & Wu, H.-Y. (2019). Supporting children's understanding of volume measurement and ability to solve volume problems: Teaching and learning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 15(12), 1789-1824. <https://doi.org/10.29333/ejmste/109531>

- Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R., & Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(1), 4-23. <https://doi.org/10.2307/30034918>
- Joram, E., Subrahmanyam, K., & Gelman, R. (1998). Measurement estimation: Learning to map the route from number to quantity and back. *Review of Educational Research*, 68(4), 413-449. <https://doi.org/10.2307/1170734>
- Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). National Council of Teachers of Mathematics.
- Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, 41, 209-238. <https://doi.org/10.1023/A:1003927811079>
- Ruwisch, S., & Huang, H.-M. E. (2018, May 7-11). *Length measurement and estimation in primary school: A comparison of the curricula of Taiwan and Germany* [Paper presentation]. The 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Taipei, Taiwan.
- Sisman, G. T., & Aksu, M. (2016). A study on sixth grade students' misconceptions and errors in spatial measurement: Length, area, and volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1293-1319. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9642-5>
- Smith III, J. P., Males, L. M., Dietiker, L. C., Lee, K., & Mosier, A. (2013). Curricular treatments of length measurement in the United States: Do they address known learning challenges? *Cognition and Instruction*, 31(4), 388-433. <https://doi.org/10.1080/07370008.2013.828728>
- Tarr, J. E., Reys, R. E., Reys, B. J., Chávez, Ó., Shih J., & Osterlind S. J. (2008). The impact of middle-grades mathematics curricula and the classroom learning environment on student achievement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 247-280. <https://doi.org/10.2307/30034970>
- Venenciano, L., & Dougherty, B. (2014). Addressing priorities for elementary grades mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 34(1), 18-24.
- White, P., & Mitchelmore, M. C. (2010). Teaching for abstraction: A model. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(3), 205-226. <https://doi.org/10.1080/10986061003717476>
- Wu, M. (2009). A comparison of PISA and TIMSS 2003 achievement results in mathematics. *Prospects*, 39, 33-46. <https://doi.org/10.1007/s11125-009-9109-y>
- Yang, D.-C., Tseng, Y.-K., & Wang, T.-L. (2017). A comparison of geometry problems in middle-grade mathematics textbooks from Taiwan, Singapore, Finland, and the United States. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(7), 2841-2857. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.00721a>

附錄 1 本研究分析之各版本教科書的面積與體／容積單元相關資料

測量與版本	出版年	冊別	單元碼	單元名稱	起訖頁碼	頁數
面積						
南一	2016	8	5	周長和面積	55~64	10
南一	2016	9	8	平行四邊形、三角形和梯形的面積	97~109	13
康軒	2015	8	7	周長與面積	81~91	11
康軒	2015	9	6	面積	77~90	14
翰林	2012	7	6	周長與面積	66~79	14
翰林	2013	9	2	面積	20~33	14
體／容積						
南一	2016	8	10	立方公分	121~128	8
南一	2014	10	4	體積的計算	37~44	8
南一	2014	10	10	體積和容積	107~116	10
康軒	2014	7	4	體積	55~62	8
康軒	2015	9	2	體積	19~28	10
康軒	2015	10	3	容積	31~40	10
翰林	2013	8	4	立方公分	38~45	8
翰林	2015	10	3	體積	32~40	9
翰林	2015	10	4	容積	42~50	9