

## 教科書評論

---

# 評介素養導向的數學教科書——脈絡數學

鄭章華

## 壹、前言

十二年國民基本教育（簡稱十二年國教）預計於 2019 年實施，其理念為「適性揚才，成就每一位孩子」。十二年國教總綱以「核心素養」取代「基本能力」，強調適性揚才的全人教育，培養下一代具備終身學習、社會參與和溝通互動的素養。各領域在總綱的大架構底下，因應領域特性轉化總綱理念與核心素養，發展各自的課程理念與核心素養以及呼應的學習重點等。

核心素養近年來在國內外愈受到重視（蔡清田、陳延興，2013），而數學教育界也開始重視數學素養的培養。以英國為例，該國在 2013 年頒布了新的數學課程綱要，希望藉由高品質的數學教育促進學生概念性的理解，使下一代能應用數學解決常規和非常規問題、對於數學有著正向態度和好奇心以及欣賞數學的美和威力等（Department for Education, 2013a, 2013b）。數學素養已逐漸成為許多國家數學課程發展的重點。

十二年國教數學領域課程綱要（簡稱數學領綱）的發展呼應先進國家的做法，以核心素養為主軸，因應數學學科的特性，轉化總綱三面九項為領域的核心素養，列出學生在完成特定教育階段時所應展現的知識、技能或態度。各教育階段核心素養的敘寫著重數學學習之綜向銜接，以引導課程內容的發展符合數學學習的邏輯結構，促進高品質數學

課程所需之連貫性；讓學習者看到特定的數學想法是如何建立在其他想法之上或是和其他想法之間的關聯，有助於學習者習得新的數學理解與技能（National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000）。

本次課程改革的重點在於轉化核心素養於課程和教學的設計（林永豐，2017），而教科書在引導教師的課堂教學往核心素養發展上，扮演了關鍵的角色。由於我國中小學教師相當依賴教科書進行教學（林碧珍、蔡文煥，2006），因此十二年國教課程的理念與目標若能藉由教科書的設計來達成，教科書可成為課程改革的有力推手；相反地，若教科書內容不符合新課綱的課程理念與目標時，教科書就成為課程理念轉化的重大阻礙（張芬芬、陳麗華、楊國楊，2010）。若能提供素養導向的教科書案例作為出版業者撰寫教科書與教師自編教材之參考，相信有助於十二年國教數學領綱的理念順利轉化教學現場。

本文評介一套具有素養導向特色的數學教科書——《脈絡數學》（*Mathematics in Context*, MiC），它是由美國與荷蘭跨國合作所發展出來的教科書，被「美國科學促進會」（American Association for the Advancement of Science）評選為最高品質的中學數學教科書之一（楊德清、陳仁輝，2011）；期能藉由評介《脈絡數學》，有助於教育界對於數學素養導向教學理念轉化於教科書撰寫的討論與認識。作者首先簡介 MiC 的緣起與背後的成書理念，接著舉其中一個單元章節為案例說明，最後做出結語。

## 貳、脈絡數學的成書緣起與理念

為具體轉化美國數學教師協會（NCTM）於 1989 年所提出之《學校數學課程與評估標準》（*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*）的教育改革文件，美國國家科學基金會（National Science Foundation）提供經費支助威斯康辛大學的教育研究中心，和荷蘭 Utrecht 大學的 Freudenthal Institute 以 6 年的時間共同研發《脈絡數學》這一套數

學課程教材 (Romberg & Shafer, 2004)。美國團隊包括計畫主持人 Thomas Romberg、數學教育學者、學科專家、課程與教學專家、數學教師，荷蘭團隊則由 Jan de Lange 擔任計畫主持人。教材由荷蘭團隊先撰寫草稿，美國團隊成員檢視與修改，使之符合《學校數學課程與評估標準》與美國的國情，接著在威斯康辛州試教，根據師生的使用回饋修改之後，再到其他州與美屬波多黎各進行更大規模的試教與修正定稿，成書的過程審慎而嚴謹。

該書的第一版於 2003 年出版，涵蓋五至八年級共 40 個單元；第二版於 2010 年出版，涵蓋六至八年級共 28 個單元。每個單元包括「學生手冊」、「教師指引」與「評量素材」(assessment materials)。「學生手冊」類似教科書，裡面由許多活動所構成，這些活動常圍繞著一個主題脈絡而展開，讓學生藉由探索、解決真實生活的問題來建構知識與發展相關的技能。「教師指引」包括：單元目標說明、該單元和數學課程改革文件的關聯、和其他單元的關係、數學內容及教學注意事項、學生可能的回答與教學建議、如何照顧不同能力學生的學習需求建議等。「評量素材」提供例行與非例行性的問題，期能使學生連結習得的概念與程序來解決這些問題，以及提供可靠的證據讓教師評估學生的數學理解程度；雖然和教學活動同樣是情境式的問題，在題目敘述與內容上看起來差不多，但兩者所使用的情境是有所差異的 (曾志華, 2006)；學生手冊上的教學活動是在一個熟悉的情境下，讓學生探索新的概念，而評量問題則是評估學生在不熟悉的情境下能否進行遷移與運用所學。

《脈絡數學》的撰寫理念來自於荷蘭的「現實數學教育」(Realistic Mathematics Education, RME)，由數學家 Freudenthal 所提倡，其核心想法為「數學為人類的活動」(mathematics as a human activity)。RME 的理念對於二十世紀下半葉的數學教育有著重要的影響。RME 認為數學學習應與情境結合，提出「活動」(activity)、「真實」(reality)、「層次」(level)、「纏繞」(intertwinement)、「互動」(interaction) 和「引導」(guidance)

六項數學教育原則（Van den Heuvel-Panhuizen, 2000）。現分述如下：

一、活動原則：帶領學生從做中學，建構相關的數學工具與發展數學洞察，成爲一個主動的參與者。

二、真實原則：來自現實世界的數學問題是數學學習的重要資源，具有其意義與價值。

三、層次原則：數學學習經歷不同層次的理解，學習者從一開始處理非形式化、具有脈絡的問題，逐步發展出解題捷徑與基模，最終獲得對所學內容之間的關聯與洞察。

四、纏繞原則：應考量數學的內部連結與外部連結，作爲現實生活應用的基礎。

五、互動原則：藉由與同儕分享解題策略，聆聽他們的想法，透過互動促進自我反思學習，提升理解的層次。

六、引導原則：教師扮演引導和催化的角色，營造數學知識建構過程的環境，讓學生「再次」發明數學。

其教學進路( approach)爲由「下而上」(bottom-up)(Romberg & Shafer, 2004)，引領學生在參與數學活動中建立屬於自己的問題解決模式，作爲建構形式數學知識的基礎，從「非形式」(informal)逐漸進到「形式化」(formal)的數學學習。換句話說，《脈絡數學》不同於以往數學教科書鋪排知識的做法：傳統教科書在開頭往往就給出定義或呈現公式，然後舉出一連串的例題說明定義與公式的使用，並讓學生練習類似的題目以熟悉定義與公式；與之相對地，《脈絡數學》常以一個現實情境開頭，情境來自於真實生活、數學史、社會議題或是虛構的故事，接著以題組的方式，讓學生進行探索、討論與合作來解決問題。在進行活動的過程中，學生逐步發展出處理特定問題情境的模式 (model of)，當學生持續進行不同的活動時，該模式將在解決不同問題情境中抽象發展，形成跨情境的問題解決模式 (model for)，從而建立形式化的知識或發展相關的技能。因此在《脈絡數學》中，定義宣告或公式呈現往往在相關的數學

探索活動之後。

國內有不少論文在進行教科書跨國比較時，會以《脈絡數學》作為比較標的。楊德清與陳仁輝（2011）的跨國比較發現，在處理代數主題時，「部編版」的數學內容較為廣泛，偏重程序性的知識；而《脈絡數學》則是藉由情境學習引導學生理解數學概念，引入教育科技來輔助運算，鼓勵學生提出多元的解題策略。吳麗玲與楊德清（2007）的研究發現在分數單元方面，《脈絡數學》對於情境問題的編排遠高於康軒版的數學，強調概念性理解；康軒數學則是著重程序性問題。在統計主題上，陳宗聲與楊德清（2009）的比較發現《脈絡數學》從真實生活取材，活動鋪陳循序漸進、脈絡清晰，鼓勵學生多元解題；我國教材雖涵蓋的題型廣泛，但呈現的方式制式化，多由教師示範解題、學生模彷，注重程序性知識。張英傑與張素宜（2008）則是借鏡《脈絡數學》的精神，從情境學習理論的觀點，提出幾個「數與量」主題的本土性教材案例。簡而言之，《脈絡數學》重視數學概念的理解，常從真實生活情境出發，引起學生的學習動機，讓學生在探索活動中建立數學知識和技能，鼓勵學生提出自己的想法和多樣化的解題策略，以及為不同學習需求的學生提供數學學習機會。

## 參、脈絡數學簡介：以直角三角比單元為例

對於許多學過國中數學 1993 年版以前的人而言，數值三角（ $\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$ ）的內容相當具有挑戰性。很多人的學習經驗可能是背正弦（ $\sin$ ）、餘弦（ $\cos$ ）、正切（ $\tan$ ）的定義以及相關的公式，例如，商數關係：正切等於正弦除以餘弦、平方關係：正弦的平方加上餘弦的平方等於一。十二年國教數學領綱在國中階段關於直角三角比的學習表現條目為：「s-IV-12 理解直角三角形中某一銳角的角度決定邊長的比值，認識這些比值的符號，並能運用到日常生活的情境解決問題」。對

應的學習內容為 S-9-4：「相似直角三角形邊長比值的不變性：直角三角形中某一銳角的角度決定邊長比值，該比值為不變量，不因相似直角三角形的大小而改變……」。十二年國教教科書的編寫可能是放到九年級上學期，在學過相似三角形的概念之後學習直角三角比。《脈絡數學》則是放到八年級來學習，單元名稱為「角度」(Looking at an Angle)。

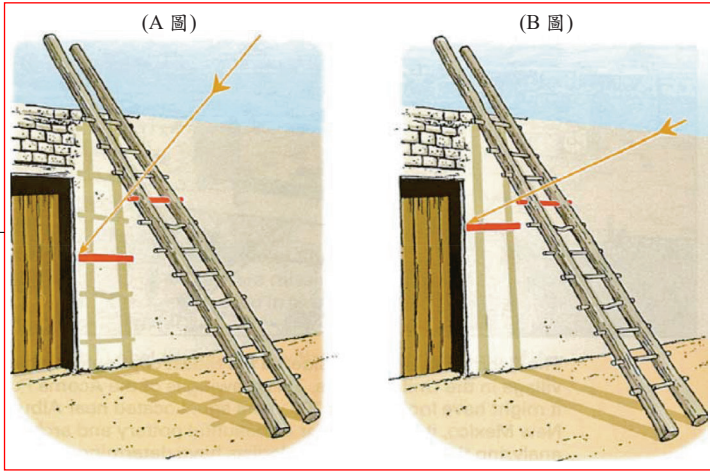
角度單元分成五個小章節，限於篇幅，本文僅介紹第三節與第四節的內容。第三節的標題為「陰影與角度」(Shadows and Angles)，一開始以美國古老的阿哥瑪部落為情境，呈現村莊的典型建築圖像。由於該部落的房子沒有前門，人們須使用梯子進到二樓。倚靠牆上的梯子會形成不同的夾角，有數種方法可測量梯子的陡度，如圖 1 所示。

從圖 1 可以看出《脈絡數學》讓學生從陽光投影梯子的生活經驗出發，進到梯子倚靠牆壁的側視圖，逐漸抽象出直角三角形的幾何圖形，展現了 RME 的「真實原則」。另外，教材使用生活中比較常見的語詞「陡度」，而非數學的「斜率<sup>1</sup>」一詞。接下來的活動請學生利用直尺或筆當作梯子，再將書本或盒子直立當作牆面，研究不同的陡度，以文字描述或畫出觀察結果，呼應了「活動原則」。在學生完成活動之後，教材提示學生可以從測量角度或是計算梯子高度與牆壁距離的比來找出梯子的陡度，而距離比可用比值或分數來表示，作為學習「正切」概念的前置經驗（層次原則）。

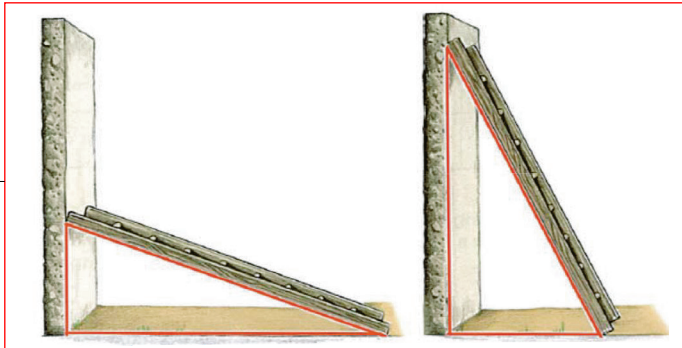
<sup>1</sup> 美國學生在學線性方程式時，即接觸到「斜率」一詞與概念。

真實與層次原則：從生活中梯子投影以及其側視圖探索夾角的概念，並作為學習正切的前置經驗。

在 B 章節中提過太陽光是平行的。A 圖中有一張梯子及它的影子。圖中同樣可見陽光投射的梯級影子。



2. 利用學生活動材料 10 畫出 A 圖中投射出各梯級影子的太陽光線。  
B 圖代表不同時間點同樣位置的梯子。
3. 利用學生活動材料 10 畫出 B 圖的太陽光線與其它梯級的影子。  
下方為同一張梯子椅靠牆上的側視圖。



4. 描述圖片中梯子位置的差異。
  - a. 若梯子非常傾斜會有什麼問題？
  - b. 若梯子不夠傾斜會有什麼問題？

圖 1 脈絡數學——陰影與角度活動

資料來源：Encyclopedia Britannica (2010: 21)。

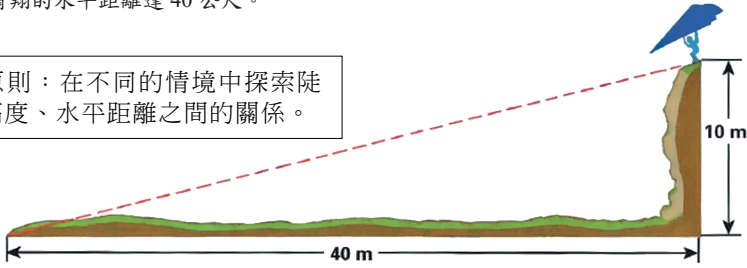
第四節的標題為滑翔角 (Glide Angles)，開頭先簡介滑翔翼這門運動，提到有位飛行員瑪麗安從 10 公尺高的峭壁飛行，而滑翔的水平距離為 40 公尺 (參見圖 2)。活動一與活動二要求學生在陡度相同的前提下，從不同的高度求出滑行的水平距離，學生須運用第三節所學到的陡度概念來完成任務。活動三則是給出不同的陡度，讓學生在表格中求出高度或是水平距離，此處學生得根據陡度，視高度或水平距離的條件，找出相應的水平距離或高度。活動四進一步讓學生運用角度固定、則陡度不變的概念 (即相似三角形)，從給定的高度求出滑翔翼飛行的水平距離。學生在不同的生活情境中探索陡度、高度、水平距離之間的連結 (纏繞原則)，建立不同的問題解決模式，應用所學向老師或同儕說明滑翔翼和滑翔機哪一個飛行距離比較遠，展現了「互動原則」的教材設計。

接著《脈絡數學》引入「滑翔比」(Glide Ratio) 的概念，告訴學生要判斷哪一個滑翔翼能飛最遠，可從滑翔比來判斷。以瑪麗安的滑翔翼為例，第一款滑翔翼由 10 公尺起飛，可飛行 40 公尺，滑翔比是 1 : 4；而第二款滑翔翼由 10 公尺起飛時可飛行 70 公尺，滑翔比為 1 : 7，然後詢問學生滑翔比的意義為何。在設計一些操作活動讓學生掌握滑翔比的概念以及與滑翔角的關係之後，教材才引進正切的概念，以表示滑翔角與滑翔比的關係，如圖 3 所示。



圖中的飛行員瑪麗安，決定從 10 公尺高的峭壁進行第一次飛行。圖中可見滑翔的水平距離達 40 公尺。

纏繞原則：在不同的情境中探索陡度、高度、水平距離之間的關係。



經過幾次成功的滑翔後，瑪麗安決定挑戰更高的地方，15 公尺高的峭壁。

1. 從這個高度向下能飛行多長的水平距離？備註：假設飛行途徑的陡度維持一定。
2. 瑪麗安分別從 20、50、100 等三個不同高度起飛，每一次飛行的水平距離分別是多少？

瑪麗安設計了一款滑翔翼，飛行距離比第一款遠。瑪麗安表示使用新款滑翔翼時，從 10 公尺高的峭壁往下能飛行 70 公尺。

3. a. 畫出瑪麗安使用新款滑翔翼時的飛行途徑側視圖。  
b. 根據新款滑翔翼完成下列表格。

高度(公尺)	10	25	100		
水平距離(公尺)	70			245	1,000



上圖有三張連續照片，圖中滑翔機是實驗用模型，在短時間內拍攝三張照片就可以判斷飛行途徑。

4. 在筆記本上描繪此滑翔翼的飛行途徑，並繪製如 33 頁上方圖片的比例圖，再回答下列問題。
  - a. 若圖中滑翔翼起點高度為 5 公尺，在著陸前共飛行多長距離？
  - b. 從 10 公尺峭壁起飛能飛行多長距離？
  - c. 將此滑翔機與瑪麗安的兩款滑翔翼比較，若同樣從 10 公尺高度起飛，哪一個能飛最遠？請說明。

圖 2 脈絡數學——滑翔角活動

資料來源：Encyclopedia Britannica (2010: 35)。

此處才正式引進正切符號

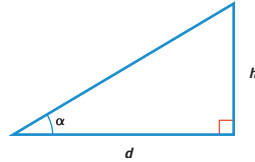
**滑翔比與正切 (Tangent)**

滑翔飛行時，滑翔比與滑翔角度的關係極為重要，如同梯子的放置。因此有好幾種方式可以表達比值與角度。

滑翔比 =  $h:d$

滑翔角 =  $\alpha$

$h:d$  的比值即為  $\angle \alpha$  的正切，或寫作  $\tan \alpha = \frac{h}{d}$ 。



滑翔比為 1:1 時，滑翔角為  $45^\circ$ ，故  $\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$ 。

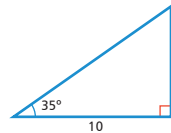
假設奧托另一個滑翔翼的滑翔比為 1:7，即表示滑翔角的正切為  $1:7$  (或  $\frac{1}{7}$ )。

13. 試著描述滑翔比、滑翔角與正切的關聯性。

假設某個滑翔翼的飛行途徑如下：

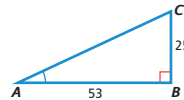
我們從中發現， $35^\circ$  度角的滑翔比為 0.7 (或 7:10)。

寫作  $\tan 35^\circ = \frac{7}{10} = 0.7$ 。

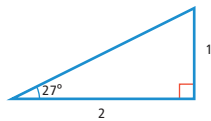


另一個滑翔翼如下：

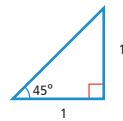
$\angle A$  的正切為 25:53 或 0.47。寫作  $\tan A = \frac{25}{53} = 0.47$ 。



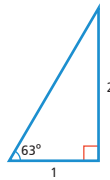
14. 下列皆為直角三角形，完成填空。



a.  $\tan \underline{\quad}^\circ = \underline{\quad}$



b.  $\tan \underline{\quad}^\circ = \underline{\quad}$



c.  $\tan \underline{\quad}^\circ = \underline{\quad}$



d.  $\tan \underline{\quad}^\circ = \underline{\quad}$

圖 3 脈絡數學——正切活動

資料來源：Encyclopedia Britannica (2010: 37)。

正切統整了學生在前面學到的滑翔角和滑翔比，一直到此時，《脈絡數學》才引進 TAN 符號並說明正切概念，而非傳統教科書一開始就定義何為正切。學生從滑翔角和滑翔比學習活動中感受到正切在現實生活中的用處。在介紹完正切之後，活動 13 要求學生說明滑翔角、滑翔比、正切三者間的關係，教師可從師生活動進行形成性評量，從學生的回答來評估他們對於正切概念的掌握程度。本單元一直到活動 14 才進到形式化的練習，學生使用正切的概念和符號來回答問題，教師同樣可以從回答來確認學生是否達到學習目標或是否產生迷思概念。然後教材以「彼得想買一款巴沙木的滑翔翼模型給外甥，但不確定該買哪一種，而專賣店店員表示滑翔角的正切愈小愈好」的情境，讓學生使用科學計算機探索、確認店員的話是否正確，學生必須應用所學到的正切概念來解決此一問題，最後則是介紹正切的數學史結束此一章節，具體展現 RME 的「引導原則」。

## 肆、結語

《脈絡數學》作為素養導向教學之數學教科書範例，其成書過程審慎而嚴謹，背後有著明確的數學教育哲學理念作為指引。若我們希望國內能出現像《脈絡數學》這樣高品質的數學教科書，需要有團隊或機構長期進行教科書研發，進行教學實驗與修正。1975 年課程標準時期之部編本數學教科書（簡稱 1975 年版）的發展模式——板橋模式<sup>2</sup>值得作為研發的參考。1975 年版的數學教科書先有實驗本、然後是試用本、最後是正式本。教科書經由數學、課程、心理、教育之專家學者及優秀國小教師組成的「國民小學數學科課程實驗研究小組」，經過教材研發→教學實驗→教材修改→教材試用→教材修改→國定本教科書（曾志華，付

<sup>2</sup> 1975 年版的數學教科書由臺灣省國民學校教師研習會研修，當時位處於臺北縣板橋市，故此時期的教科書發展有「板橋模式」之稱。

梓中)，此套教科書在小學全面使用為期 15 年左右，是目前國內使用時間最久的數學教科書。政府宜建立鼓勵的機制支持教科書的長期發展研究，累積優良的單元案例與研修經驗，提供給民間出版業者以提升其教科書的品質，或是作為教科書審查的參考。

再者，《脈絡數學》有 RME 作為指導成書之數學教育哲學，其教學活動的鋪陳、教材教法與評量設計扣緊現實生活的情境，圍繞著明確的脈絡主軸而開展。在 1960 年代左右，許多國家紛紛仿效美國推動以公理化為基礎的數學教育改革，推行新數學運動，我國也亦步亦趨從高中、國中到國小推動新數學。荷蘭則是在數學家 Freudenthal 的倡議下，以「數學是人類的活動」的哲學理念為依歸，走出一條屬於自己的教育改革道路。而我國的數學教育哲學是什麼？這方面的文獻探討可說是寥寥可數，遑論反思數學教科書編寫背後的上位指導原則。這方面應有更多的研究和討論，以建立我國數學課程與教科書發展的主體性，研發出具有臺灣特色的數學教科書。

## 參考文獻

- 林永豐（2017）。核心素養的課程教學轉化與設計。《教育研究月刊》，275，4-17。
- 林碧珍、蔡文煥（2006）。TIMSS 2003 國小四年級學生的數學成就及其相關因素之探討。載於張秋男（主編），**TIMSS 2003 國際數學與科學教育成就趨勢調查國家報告**（頁 123-161）。臺北市：國立臺灣師範大學科學教育研究中心。
- 吳麗玲、楊德清（2007）。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材布題呈現與知識屬性差異之研究。《國立編譯館館刊》，35（1），27-40。
- 張芬芬、陳麗華、楊國楊（2010）。臺灣九年一貫課程轉化之議題與因應。《教科書研究》，3（1），1-40。
- 張英傑、張素宜（2008）。小寶貝，我把數學變簡單了——從情境學習理論談數學課程設計。《科學教育月刊》，313，9-17。
- 曾志華（2006）。教師亟待學習的評量專業：以 MiC「型與符號」的評量為例。《台灣數學教師電子期刊》，8，11-20。
- 曾志華（付梓中）。國民小學數學課程標準時期的發展。載於鄭章華（主編），

- 中小學數學課程發展史（頁 94-135）。新北市：國家教育研究院。
- 陳宗聲、楊德清（2009，12月）。我國教材與美國 MiC 教材關於統計課程之差異的探究。論文發表於國立臺灣師範大學主辦之「中華民國第 25 屆科學教育」學術研討會，臺北市。
- 楊德清、陳仁輝（2011）。臺灣、美國和新加坡三個七年級代數教科書發展學生數學方式之研究。科學教育學刊，19（1），39-67。
- 蔡清田、陳延興（2013）。國民核心素養之課程轉化。課程與教學季刊，16（3），59-78。
- Department for Education. (2013a). *The national curriculum in England: Framework document*. Retrieved from [https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment\\_data/file/425601/PRIMARY\\_national\\_curriculum.pdf](https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/425601/PRIMARY_national_curriculum.pdf)
- Department for Education. (2013b). *National curriculum in England: Mathematics programmes of study (statutory guidance)*. Retrieved from <https://www.gov.uk/government/publications/national-curriculum-in-england-mathematics-programmes-of-study>
- Encyclopedia Britannica. (Ed.). (2010). *Mathematics in context: Looking at an angle*. Chicago, IL: Holt, Rinehart and Winston.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Romberg, T. A., & Shafer, M. C. (2004). *The longitudinal/cross-sectional study of the impact of teaching mathematics using mathematics in context on student achievement: Monograph 1*. Madison, WI: University of Wisconsin-Madison.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Utrecht, the Netherlands: Utrecht University.