教科書研究
第十一卷 第三期（2018 年 12 月），33-62

臺灣、新加坡及巴西數學教科書中數學素養內涵之比較——以畢氏定理為例

左台益　李健恆　潘亞衛　呂鳳琳

數學教育的目標在培養學生的數學素養，而教科書則是達成這個目標的重要工具。本研究從 PISA 的數學素養觀點分析臺灣、新加坡及巴西數學教科書的內容，並以畢氏定理單元爲例，分別從其內容結構、數學識能及建模歷程三個維度進行分析，以提供教科書中數學素養內涵的想法及架構。研究結果顯示臺灣和新加坡教科書之內容結構較爲相似，但數學識能的部分，卻只有「推理及論證」和「使用符號、運算及正式語言」這兩個識能在三個版本的分布是沒有顯著差異的，而建模歷程部分，在形成、應用、詮釋或評估三個歷程中，都各有一些面向顯示三個國家的教科書有不盡相同的地方。上述結果顯示，雖然在 PISA 評量中臺灣與新加坡的學生表現接近，其教科書所展現的數學素養內涵並不相似，但卻能提供編寫發展數學素養的教科書更多面向的參考建議。

關鍵詞：建模、畢氏定理、數學素養、數學識能

收件：2018年6月26日；修改：2018年10月11日；接受：2018年11月5日

左台益，國立臺灣師範大學數學系教授
李健恆，國立臺灣師範大學數學系博士生，E-mail: kinhanglei16@gmail.com
潘亞衛，印第安納大學布魯明頓校區課程與教學系博士生
呂鳳琳，國立臺灣師範大學數學系博士生

Journal of Textbook Research
Vol. 11, No. 3 (December, 2018), 33-62

Comparative Implications of Mathematical Literacy between Taiwanese, Singaporean, and Brazilian Textbooks: Using the Pythagorean Theorem as an Example

Tai-Yih Tso　Kin Hang Lei
Weverton Ataide Pinheiro　Feng-Lin Lu

Developing students' mathematical literacy is the primary goal of math education, and textbooks play a crucial role in this endeavor. In this study, we analyzed mathematics textbooks used in Taiwan, Singapore, and Brazil from the perspective of PISA mathematical literacy. Focusing on the Pythagorean theorem, we analyzed three dimensions (content structure, mathematical competencies, and modeling process) to provide a framework for elucidating the meaning and implications of mathematical literacy in textbooks. The results indicated that textbooks used in Singapore and Taiwan possessed a similar content structure, whereas only the "Using Symbols, Operations, and Formal Language" and "Reasoning and Argument" competencies were similar in all three textbooks. Some aspects of the modeling process, such as "Formulating," "Employing," and "Interpreting or Checking," were presented differently in each textbook. In short, the meaning and implications of mathematical literacy presented in these textbooks differed, although students' PISA performance was similar in Taiwan and Singapore. The results of this study may serve as a reference for developing mathematical literacy when writing textbooks.

Keywords: modeling, Pythagorean theorem, mathematical literacy, mathematical competencies

Received: June 26, 2018; Revised: October 11, 2018; Accepted: November 5, 2018

Tai-Yih Tso, Professor, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
Kin Hang Lei, Ph.D. Student, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, E-mail: kinhanglei16@gmail.com
Weverton Ataide Pinheiro, Ph.D. Student, Department of Curriculum and Instruction, Indiana University Bloomington.
Feng-Lin Lu, Ph.D. Student, Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

壹、緒論

因應社會的發展，教育部提倡的十二年國民基本教育，將以素養概念統整過往教學中所強調的知識、技能和態度（曾志朗、柯華葳、李俊仁、陳明蕾，2017）。而數學素養是培養學生成爲理性溝通、社會參與的國民重要素養之一，也因此是重要的基礎教育課程目標。李國偉、黃文璋、楊德清與劉柏宏（2013：7）主張：

> 數學素養指個人的數學能力與態度，使其在學習、生活、社會與職業生涯的情境脈絡中面臨問題時，能辨識問題與數學的關聯，從而根據數學知識、運用數學技能、並藉由適當工具與資訊，去描述、模擬、解釋與預測各種現象，發揮數學思維方式的特長，做出理性反思與判斷，並在解決問題的歷程中，能有效地與他人溝通觀點。

上述主張與經濟合作與發展組織（Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2016）所提倡的數學素養類同，都是以積極參與社會及重視將學校裡所學的數學應用於日常生活中。OECD 所主導的國際學生能力評估計畫（PISA）主要從數學化（mathematization）和建模（modeling）的觀點來評量各國 15 歲學生的數學素養（Niss, 2015），從評量結果發現不同國家學生的數學素養存在差異，因此目前許多研究（Andrews, Ryve, Hemmi, & Sayers, 2014; Ilbagi & Akgun, 2013; Ryan, 2013）嘗試從國家政策、學校類型、師資培育等面向來分析差異之成因。

教科書爲教學及評量提供一個可依循的框架，它既提供教師在課室中展現課程內容的重要工具（Schmidt, McKnight, & Raizen, 2002），也爲分析各國教育政策及課程制定提供理想的切入點（Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, & Houang, 2002）。因此，教科書的內容及對數學問題的呈現方式成爲研究中常見的主題（Son & Diletti, 2017），卻只有少數的研

究分析數學教科書中所呈現的數學素養內涵。例如，Gatabi、Stacey 與 Gooya（2012）主要從建模觀點來探討數學教科書中的數學素養，他們分析伊朗和澳洲九年級數學教科書中三個與現實生活應用密切的單元，研究發現上述兩個國家的教科書主要差異來自問題脈絡的多樣性以及提供學生建模的機會，由此推論數學化及建模技巧可能對發展學生的數學素養有一定的影響。根據 PISA 問題所評量的數學素養，數學概念固然是評量的主要內涵，配合現實生活情境與建模技巧外，數學識能（mathematical competencies）（劉柏宏，2016）也是數學素養的核心項目（OECD, 2016）。數學識能包括運用數學作溝通、推理、表徵、制定策略以及適當使用語言及工具來解決問題的能力（Niss, 2003），而建模主要由形成（formulate）、應用（employ）、詮釋（interpret）及評估（evaluate）歷程所組成，如圖 1 所示。然而，這樣的歷程並非必須在每個數學問題中完整呈現，它只是提供建模活動與數學素養之間的連結參考（Stacey, 2015），但可以肯定的是數學內容的展現、數學識能之應用以及建模歷程之展現分析都是呈現數學素養內涵的重要途徑。

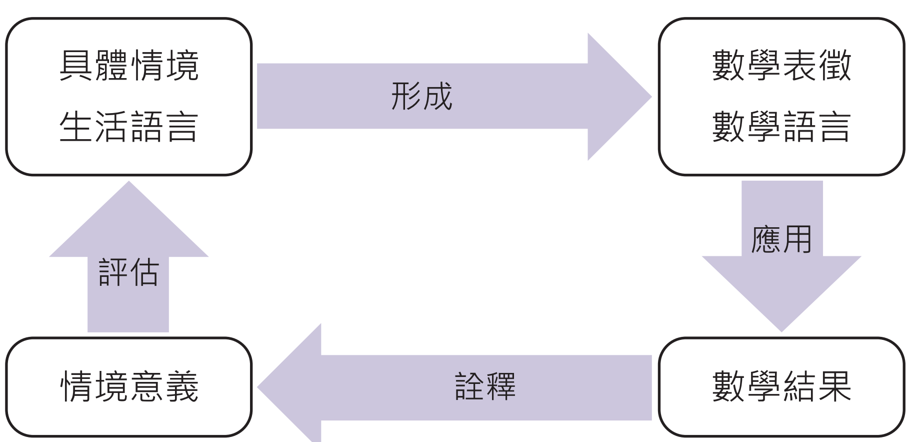


圖 1　數學問題中的建模歷程

資料來源：修改自 OECD（2016: 66）。

連結眞實生活情境的數學概念非常多，在十二年國民基本教育課程綱要（2018）中就明確指出，畢氏定理在生活上的應用是必要的學習內容之一。與該定理之相關學習內容除了計算直角三角形的邊長外，還包括定理證明方法的多樣性，以及在數學史上的貢獻及影響，是屬於容易與生活連結且具備多種數學表徵方式的主題。Stacey 與 Turner（2015）亦以畢氏定理概念爲例，說明教科書題目與 PISA 問題之間的差異，其中數學教科書所呈現的是以知識的展現與習得爲目標，並非都以數學化過程爲核心；而 PISA 問題並不只是檢測學生概念或記憶的結果，而是強調能在一個眞實情境中展現推理及解決問題的能力（即建模歷程）。因此，從 PISA 評量的核心建模觀點分析數學教科書中所展現的數學素養內涵，將對未來設計以數學素養爲導向的教科書提供參考性的建議。

從國際評量 PISA 的結果看來，臺灣 15 歲學生雖然也有不錯的表現，但在形成、應用、詮釋及評估歷程中仍然有不足的地方（臺灣 PISA 國家研究中心，2015）。因此，本研究根據不同國家的 PISA 結果，從表現較前端及後端的國家中，選取了新加坡和巴西作爲臺灣的比較對象，藉著探討國際評量表現與臺灣不同的國家，其數學教科書所展現數學素養內涵的情況，作爲發展素養教學素材之參考。綜合上述分析，我們分別從內容結構、數學識能以及建模歷程，探討臺灣、新加坡及巴西數學教科書之畢氏定理單元中下列相關研究問題，包括各國教科書畢氏定理單元的：一、內容結構爲何？二、數學識能之應用有何差異？三、建模歷程之展現有何差異？

貳、文獻探討

一、畢氏定理及其相關研究

Bronowski（1973）認爲畢氏定理是整個數學中最重要的單一定理，它致使無理數的發現，在數學和其他自然學科中皆占有重要的地位和廣

泛的運用。超過四百種證明方法是它較其他定理特別之處，而且數量仍然持續增加中，不同的證明方法展現了該定理的獨特性及多樣性。在目前國中數學課程中以它的幾何知識、代數結構、相關的數學史、定理的推理論證以及應用爲主要學習內容（十二年國民基本教育課程綱要，2018），教學目標除了能夠使用畢氏定理解決一些簡單的生活問題外，滲透「數形結合」和「轉化」的數學思想也是定理的應用重點，由此凸顯了該單元同時具備代數及幾何特性的多元面貌。雖然畢氏定理多以其代數形式 $a^2 + b^2 = c^2$ 表達，但畢氏定理的內涵卻是與面積相關的幾何敘述有關（Maor, 2007），即以直角三角形的三邊爲邊長作出三個正方形，其中兩股上兩個正方形的面積和，恰好等於斜邊上的正方形面積。因此，畢氏定理的幾何方法證明多與圖形的面積有關，如幾何原本第一卷命題 47 記載歐幾里得的證法會利用全等三角形、同底等高的三角形有相等面積等性質輔助，這個存在於表述形式與證明內涵之間的落差，是畢氏定理的學習難點之一。

雖然定理的證明方法很多，但是能讓學生自然地想到證明的方法卻是很困難的，因此畢氏定理證明的教學通常只能讓學生體會知識發現的過程。其中透過閱讀掌握知識是重要的學習方法之一，陳雅華與楊凱琳（2010）設計了畢氏定理的「應用優先」與「證明優先」兩種文本，讓學生透過閱讀的方式學習定理的證明及應用，研究發現不同文本對不同程度學生的學習表現有不同的影響，但有較多證據說明「應用優先」較「證明優先」文本更有助提升學生的數學能力表現。這樣的結果可以理解爲畢氏定理的表述形式與證明內涵之間的落差所造成，即使以「拼補相等」的方法來證明也不是簡單易懂的說明方式，先行閱讀證明對理解其應用並沒有直接的幫助。因此教科書的編寫要如何同時兼顧推理及應用能力的培養，也就是數學素養中各個內涵的適當分配及呈現，都是值得深入探討的議題。畢氏定理藉著直角三角形的特徵，刻畫了三邊長之間的關係，是後續有關幾何度量運算的必要基礎，且在現實生活中也具

有普遍的應用。楊禮黛、林煜廷、陳盈奇、張梅鳳與陳鴻仁（2017）就以畢氏定理為主題，設計生活情境體驗式數學學習教學來進行定理及其應用之講解，透過具體經驗、反思觀察、抽象觀念和主動體驗的過程，將抽象的數學透過日常生活體驗學習，並獲得正向的學習成效。由此可見，畢氏定理的應用與日常生活有密切的關聯，是幫助解決生活中數學問題的重要工具之一。

二、數學教科書比較分析之相關研究

從國際評量的結果可以肯定，各國學生在數學能力或數學素養的表現是存在差異的，這樣的結果可能受各國的歷史發展、社會文化、教育政策、課程發展等不同所影響。然而，分析比較各國的數學教科書最能直接揭示學生在數學學習內容上的異同，進而可作為編寫達成課綱教育目標（如數學素養）的教科書提供參考建議。例如，部分亞洲國家學生在國際評比中有不錯的表現，透過分析數學教科書是其中一個提供改善學生表現的方法。Son 與 Diletti（2017）回顧數學教科書分析的文獻中，就有 31 篇是美國和五個高表現的亞洲國家（中國、日本、新加坡、南韓、臺灣）的數學教科書中所展現學習機會的比較研究。他們把這些教科書分析所使用的架構分為內容及問題兩大類，這樣的分類方法又可視為水平和垂直分析（Charalambos, Delaney, Hsu, & Mesa, 2010）或宏觀和微觀分析（Li, Chen, & An, 2009）。內容分析是指與主題（如概念或程序的發展）及工具使用（如科技工具、工作例）的相關面向；而問題分析則是與問題的特徵（如表徵類型、解題步數、脈絡類型）及複雜度（如認知需求）的相關討論。換言之，數學教科書的分析可從數學概念的發展、認知過程的相關項目及知識的應用等面向進行探討，相較於數學素養內涵的展現，除比較概念的介紹和發展外，解題中所需的數學識能可視為認知期望（Son & Senk, 2010）的類別，而建模歷程則是反映知識應用的一種方式。

從內容面向來看，比較不同國家數學教科書所呈現的內容脈絡及知識結構將提供增進學習機會的建議。例如，楊德清與鄭婷芸（2015）比較臺灣、美國與新加坡國中階段的幾何教材內容，說明不同國家在內容及脈絡編排上都各有特色。臺灣教科書內容編排較多樣化，以採循序漸進之步驟爲展現原則；新加坡教科書提供多元的解題策略，著重科技融入教學的設計；美國教科書則含有大量的眞實情境問題，強調問題之理解和應用，這些特徵都是影響學生發展數學素養的可能因素。而 Charalambos 等人（2010）以樹狀圖的形式呈現賽普勒斯、愛爾蘭和臺灣國小數學教科書中，分數加減法的單元內容及其呈現順序，其結果揭示了不同的內容呈現順序可能讓學生對理解產生困難，因此學生的先備知識及其認知發展是教科書設計中必須考量的元素。Tam 與 Wang（2012）比較中國、新加坡和臺灣數學教科書的畢氏定理單元中，描述定理的證明及應用之方法是存在差異的，他們認爲教科書中若只呈現畢氏定理的代數證明方法，可能會讓學生沒有足夠機會進行幾何推理和論證。

使用不同的問題來幫助學習者建構數學概念是教科書的核心內容（Zhu & Fan, 2006），因此從問題面向來看，比較不同國家數學教科書的問題類型、呈現方式、複雜度等可幫助瞭解學生的數學學習經驗，或對理解學生在國際評量表現提供參考性的依據。例如，Gatabi 等人（2012）以 PISA 的建模歷程爲架構，比較伊朗和澳洲數學教科書中問題的形成、應用、詮釋及評估歷程中的特徵。他們主要針對使用簡單方程能建立數學關係且連結數學世界與生活情境的問題作分析，研究結果發現澳洲的教科書明顯包含較多題目符合上述分析標準，即其教科書有較多與生活情境相關的問題，且問題脈絡及問題解決方法的重複性也較伊朗教科書爲低，這些都是影響學生數學素養表現的可能原因。徐偉民與柯富渝（2014）比較臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書的幾何內容，分別以認知需求作問題類型的分類以及表徵和情境作呈現方式的說明，結果發現臺灣教科書多從生活情境引發概念學習的需求，並藉由練習來強化理

解，芬蘭教科書則以示範來培養學生的概念和演算能力，從而解決生活化或更複雜問題，而新加坡教科書則兼顧引導與示範，透過不同的練習來延伸和強化概念。因此，藉著分析教科書中數學問題的特徵，爲不同國家學生發展數學思維與能力的學習機會提供概括的樣貌。

三、數學素養及其內涵

Jablonka（2003）指出數學素養就是個體使用及應用數學知識的能力，從 PISA 題目也可看出數學素養主要是能將生活問題轉化爲數學問題，並利用數學預測現象及詮釋結果，因此數學內容、思維、行動都是連結數學與現實世界的重要途徑（OECD, 2016）。雖然目前文獻對數學素養還沒有明確一致的定義，但可以肯定的是它與應用數學解決生活問題有密切的關係，個體若具備數學素養，將能以數學知識爲基礎且有信心地應用相關知識於日常生活中（Ojose, 2011）。Stacey（2010）指出主體的內容與思維、各種識能以及現實生活情境是 PISA 問題的三個要素，主體的內容與思維可透過數與量、不確定性、變化與關係以及形狀與空間來展現；各種識能是指在認知活動中所使用到的相關數學能力。2009 年或以前的 PISA 問題主要分爲複製（reproduction）、連結（connection）和反思（reflection）類別的項目，而這些類別會依據推理、溝通或表徵的過程特徵作進一步的描述，往後的 PISA 問題則參考 Niss（2003）所提倡的八大數學能力來進一步修改識能類別的描述。換句話說，數學知識是數學素養的核心（左台益、李健恆，2018），以其爲基礎所展現的各種識能並應用於現實生活情境中的能力，應能進一步說明數學素養的內涵，圖 2 總結了數學素養的主要元素。

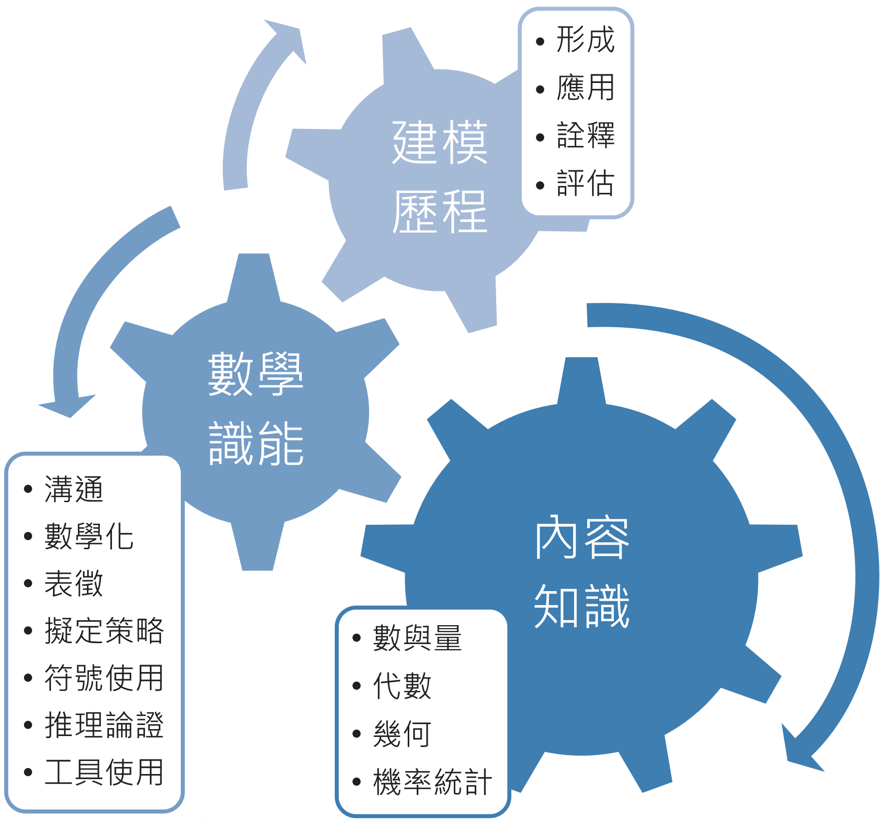


圖 2　數學素養之要素

有關數學識能的內涵，Kilpatrick、Swafford 與 Findell（2001）從數學本質提出類似數學素養的概念，他們認為概念的理解（conceptual understanding）、程序的流暢（procedural fluency）、擬定策略的能力（strategic competence）、適性的推論（adaptive reasoning）與建設性的傾向（productive disposition）可以用來說明學生在數學學習中所需具備的能力，這五股數學力是緊密糾纏在一起的，例如，缺乏概念的理解所進行的程序計算只是機械式的操作；擬定策略的能力會影響程序流暢度的發展，學生也會因為發展擬定策略的能力從而對數學的態度及信念愈來愈正向。正因為它們有密不可分的特性，且較多體現在學生解題的過程

及感受中，因此較難針對題目的內容作爲分析的架構。而 Niss（2003）提出八種數學識能可視爲數學素養的核心要素，它們分別是掌握數學思維模式（mathematical thinking）、提出及解決數學問題（problem tackling）、分析及建立數學模型（modelling）、數學推理（reasoning）、表徵數學物件（representing）、處理數學符號及演繹方法（symbol and formalism）、使用數學進行溝通（communicating）及工具使用（aids and tools），這些要素說明個體需要藉著部分或全部要素來發展處理問題的能力，這八個要素是密切相關但又各自能從其他要素中區辨出來。因此 Turner、Blum 與 Niss（2015）提出不同層次的數學識能架構，藉著對 PISA 題目進行詳細分析不斷加以修正架構內容，從而對回答題目所需具備之解題能力提供分析依據。

有關數學建模的歷程，它主要與觀察、描述、解釋、預測行爲或現象的過程有關（Dym, 2004），即個體在數學和現實世界中，運用各種數學識能並以數學爲工具作適當的理解、判斷、執行和應用，如圖 1 所示。首先，建模歷程通常由現實問題出發，透過數學語言或工具把現實狀況的特徵表徵爲數學問題（Swan, Turner, Yoon, & Muller, 2007），Gatabi 等人（2012）雖然未有把影響形成歷程的所有因素全部列出，部分因主觀判斷不同（如情境是否有趣）而影響分析一致性的項目並未包含在架構中，但從分析教科書的觀點，他們提出生活情境脈絡以及轉化過程的相關特性，已考慮影響數學化過程的主要因素。其中生活情境脈絡考慮教科書中是否包含生活情境問題，以及這些情境問題是否在同一單元中重複使用；而轉化過程則包括教科書中的問題是否需要由學生自行列式、列式是否根據類似脈絡產生和列式是否複雜等特徵。接著，應用數學知識解決數學問題則考慮其解題方法的重複性、複雜性和連結性作爲應用歷程的主要因素。最後，詮釋及評估歷程通常較難區分，因此合併爲同一個維度來說明建模過程中數學結果的情境意義，或評估相關結果是否有助於解決原來眞實情境中的問題。換句話說，解決眞實世界問題並非

數學素養的唯一目標，因此知識的發展脈絡、解題技巧的獲取、工具的應用等都應在教科書設計中加以考量。

參、研究方法

一、研究樣本

本研究分別以三個國家的教科書中畢氏定理單元作為分析對象，其中除了巴西教科書（BR）的畢氏定理單元安排在九年級外，新加坡（SG）及臺灣（TW）教科書都是八年級的教學內容。新加坡教科書是一年一冊的設計，畢氏定理為獨立一章，包含三節，分別是畢氏定理、畢氏定理在真實世界情境中的應用和畢氏定理之逆定理；臺灣教科書則是一年兩冊，畢氏定理屬於上冊中平方根與勾股定理一章中的其中一節；巴西教科書也是一年一冊，但排版較為密集，而畢氏定理則是直角三角形和圓的度量關係一章中的主要內容，因排版方式和內容安排的脈絡不同，畢氏定理雖在不同版本的教科書中所占頁面數量存在差異（表 1），但畢氏定理的意義及應用等核心內容卻是類似的。本研究所選取之數學教科書都經該國政府審訂通過，並由資深教學人員推薦且有一定數量的學校所使用之版本。另外，巴西會因學校不同而選用的教科書有所不同，我們選取的版本是經過當地國家教科書計畫（Plano Nacional do Livro Didático, PNLD）所認證之教科書，且由政府免費提供給公立學校使用之版本。雖然巴西版本沒有習作的設計，但在每個概念段落後附有大量的練習題目，而新加坡及臺灣的教科書皆附有相應內容的習作。臺灣版本的習作原屬於教科書的一部分，但因考量學生的學習及評量等需求而獨立成冊，新加坡習作則提供學生更多的練習機會而設。因此本研究將針對與畢氏定理在教科書及習作中的相關問題進行分析，以展現不同國家對畢氏定理內容的全貌。

表 1　不同版本教科書的相關資訊

版本	發行年分	總頁數		畢氏定理內容頁數	
		教科書	習作	教科書	習作
BR	2010	420	—	12（2.86%）	—
SG	2014	420	194	22（5.24%）	10（5.15%）
TW	2012	192	60	18（9.38%）	6（10%）

註：因 TW 版教科書是一年兩冊，本研究只計算畢氏定理所在冊別的頁數。

二、研究工具

本研究分爲內容結構、數學識能之應用以及建模歷程之展現三個部分進行分析。其中內容結構依據畢氏定理的學習重點作描述性的分析，其分析單位按學習重點內容進行切割，分爲直角三角形及其相關元素、歷史內容、探索活動、定理所用表徵、定理的證明及應用。而數學識能之應用和建模歷程之展現分別以 Turner 等人（2015）及 Gatabi 等人（2012）所提出架構爲依據，並配合畢氏定理的內容作修正。經數學教育專家檢驗修訂相關細目，從而確立「數學識能之應用」與「建模歷程之展現」的分析架構，分述如下：

（一）數學識能之應用

Turner 等人（2015）根據 PISA 2012 的情況，將原來 Niss（2003）的八大數學能力縮減爲溝通、數學化、表徵、擬定策略、使用符號、運算及正式語言與推理及論證，作爲六個主要的數學識能來分析 PISA 問題，並將上述六個主要數學識能分爲四個層次說明。然而，教科書主要以知識發展及應用爲主，相較於 PISA 題目，教科書較多選用基本問題以幫助學習者建構知識，而針對畢氏定理單元，題目可以使用計算機、測量或繪圖工具進行解題，因此我們保留了 Niss 原來的工具使用識能，但改以三個層次來描述教科書中的數學識能，表 2 說明了各個數學識能之應用的意涵及各層次的操作性定義。

表 2 數學識能各層次之應用的操作型定義

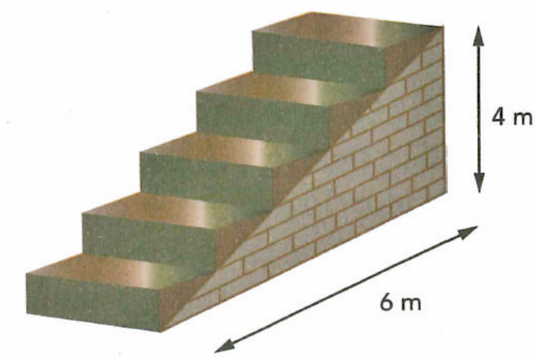
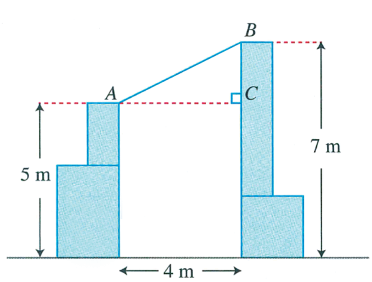
數學識能	層次	操作型定義
溝通：理解和解釋問題的能力	0	已知直角三角形其中兩邊求第三邊
	1	題目與簡單幾何圖形有關，如求等邊三角形的高。另外，在現實生活脈絡中解一個直角三角形的問題也屬於這個層次
	2	題目與三個以上的三角形或圓、錐體、直角坐標等有關
數學化：將現實生活問題轉換為畢氏定理問題的能力	0	不需轉換
	1	將只含有一個直角三角形的現實生活問題轉換為畢氏定理問題
	2	將不只有一個直角三角形的現實生活問題轉換為畢氏定理問題
表徵：以各種數學表徵表示問題的能力	0	不需使用其他表徵（如圖形）
	1	解題時對已提供圖形作簡單的修改，如添加輔助線
	2	題幹中沒有提供但需借助圖形表徵進行解題
擬定策略：選取適當策略解決問題的能力，其中四則運算、解方程等並不視為策略	0	除應用畢氏定理外，沒有需要其他策略
	1	除應用畢氏定理外，還需要另一個策略，如假設未知數解方程、重複使用畢氏定理等
	2	除應用畢氏定理外，需要使用多於一個策略
使用符號、運算及正式語言：理解、操弄及執行畢氏定理的定義及應用的能力	0	只進行畢氏定理相關的運算
	1	執行畢氏定理外的另一種計算，如因式分解
	2	執行畢氏定理外的兩種或以上的計算，如需先假設直角三角形的邊長分別為 $x, x, x+1$，計算 x 值時再展開 $(x+1)^2$
推理及論證：以畢氏定理推導問題、形成論證和結論的能力	0	使用畢氏定理作一次推論
	1	進行兩次推論，包括重複或同時使用畢氏定理或其他概念進行推理
	2	進行三次或以上的推論，包括重複或同時使用畢氏定理或其他概念進行推理
工具使用：使用工具解決問題的能力	0	不需工具輔助
	1	使用計算或測量工具
	2	工具需配合畢氏定理的概念來使用，如使用圓規或三角板作長度為無理數的線段

表 3 是教科書的一些任務例舉，編號前面的英文字母代表版本，後面的數字代表該單位在教科書中出現的次序。從溝通識能來看，TW11 直接使用畢氏定理求兩點間的距離，所以編碼爲層次 0；BR1 爲生活情境與一個直角三角形有關，編碼爲層次 1；SG5 包含多個幾何圖形，因此理解和解釋問題的能力達層次 2。從數學化識能來看，TW11 不是生活情境問題，所以編碼爲層次 0；BR1 只含有一個直角三角形的現實生活問題轉換爲畢氏定理問題，編碼爲層次 1；SG5 把不只一個直角三角形的眞實生活問題轉換爲畢氏定理問題，因此編爲層次 2。從表徵識能來看，SG132 已含有圖形，所以編碼爲層次 0；SG5 和 TW31 皆編爲層次 1，是因爲它們需要作輔助線以求得答案；BR41 則需要自行繪圖，因此編碼爲層次 2。從擬定策略識能來看，直接使用畢氏定理的問題（如 BR1、BR41、TW11）都編碼爲層次 0；添加輔助線也視爲策略之一，所以 SG5 和 TW31 都編爲層次 1；而 SG132 則編爲層次 2，主要是解題需要多個畢氏定理以外的策略，包括添加輔助線、以代數式表示式子、等邊三角形高的概念等。從符號使用識能來看，直接使用畢氏定理相關符號的 BR1，編碼爲層次 0；需要額外符號來描述圖形元素關係的 TW31，因解題過程中還需要展開多項式，因此編碼爲層次 2。從推理識能來看，只用畢氏定理作推理的 TW31，編碼爲層次 0；BR41 因還包括等邊三角形的高與底邊上中垂線重合的性質，所以編碼爲層次 1。從工具使用識能來看，SG5 因使用計算器求解，因此被編爲層次 1。

（二）建模歷程之展現

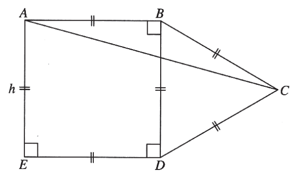
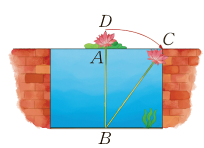
Gatabi 等人（2012）以問題情境、數學解題（Mathematical problem solving, MPS）、形成與詮釋及評估四個元素來描述建模歷程，並針對含有生活情境問題進行分析。OECD（2016）提及並非全部 PISA 問題都包含整個建模歷程，而且教科書一般較偏重知識的發展，因此我們視解決數學問題爲建模歷程的一部分，並把問題情境歸類到形成歷程中的元素，從而把建模歷程分爲形成、應用與詮釋三個主要階段，表 4 說明了建模歷程之展現中各類目的操作性定義。

表 3　數學問題例舉

編號	題目及資料來源	內容
BR1	Rosa é arquiteta. Ao fazer a planta de uma casa, deparou--se com a seguinte questão: se a altura da escada é de 4 m e o afastamento da escada à parede é de 6 m, qual deve ser o comprimento da escada?  	若階梯的高是 4m，且從階段的開始到牆壁的距離為 6m，則這個階梯的長度為何？
BR41	26 Em cada item o colega calcula mentalmente e justifica. Você confere. b) A medida da altura de um triângulo equilátero com 12 cm de lado.	在下列各個小題中，你的同學透過心算計算答案而你檢查他的答案是否正確： b) 求邊長為 12cm 的等邊三角形的高。
SG5	(Real-Life Application of Pythagoras' Theorem) In a factory, a sliding belt, *AB*, used to transport products is stretched between two vertical columns 4 m apart. The heights of the columns are 5 m and 7 m. Calculate the length of the belt.  	在一個工廠裡，一條運輸帶 AB 用作傳輸兩個相差 4m 的垂直柱子上的物品。兩個柱子的高度分別為 5m 和 7m，試計算運輸帶的長度。

（續）

表 3　數學問題例舉（續）

SG132	**30.** The figure is made up of a square *ABDE* and an equilateral triangle *BCD*.  Given that $AE = h$ units, find an expression, in terms of h, for the length of AC.	下面圖形是由一個正方形 ABDE 和一個等邊形角形 BCD 所組成。已知 AE = h 單位，試以 h 表示 AC 的長度。
TW11	例題 9　兩點的距離 已知坐標平面上 $P(-5,7)$、$Q(4,-5)$ 兩點，求 $\overline{PQ}$ 的長度。	
TW31	5 如右圖，水池中有一蓮花，高出水面部分 $\overline{AD}$ 有 25 公分，且 $\overline{AC}$ 長為 75 公分，把蓮花拉到池邊，恰好蓮花頂端碰到池邊，試問蓮花長 $\overline{BD}$ 為多少公分？ 	

資料來源：左台益（2012：103，106）；Dante（2010: 166, 175）; Yeo、Seng、Yee 與 Chow 等人（2014: 220）; Yeo、Seng、Yee、Chow 與 Yun 等人（2014: 103）。

表 4　建模歷程之展現的操作型定義

建模歷程	子類目	操作型定義
形成	生活情境脈絡	問題來自生活情境
	新脈絡	問題脈絡並沒有在同一章節之前的題目重複使用
	需要列式	問題需由學習者自行列式
	新的列式	問題列式並沒有在同一章節之前的題目重複出現
	複雜的列式	問題含有過多或過少資訊讓列式變得複雜，或需多次列式才能求解
應用	新的 MPS	解題方法及策略並未在該章節之前的題目重複使用
	多步驟 MPS	需經多個步驟才能求解
	MPS 內的其他連結	需畢氏定理外的概念
詮釋或評估	需要詮釋或評估	答案需依據生活情境作進一步詮釋或評估是否合適

在表 3 的例子中，BR1、SG5 和 TW31 屬於生活情境問題；而 BR41、TW11 和 TW31 的情境都不是該章節第一次出現，因此不屬於新脈絡的問題。有關列式的部分，表 3 中所有例子都需要學生自行列式；而因整個單元都與畢氏定理有關，所以除了 BR1 是首次使用畢氏定理進行列式外，其他都不是新的列式；這些例子大都直接使用畢氏定理就可得到答案，其中只有 SG132 被視爲複雜的列式。有關 MPS 部分，BR41 和 TW31 都與前面的問題有相同的解題過程而不算是新的 MPS；只有 SG132 需要多步驟解題，但 BR41、SG132 和 TW11 都需要應用畢氏定理以外的概念。有關詮釋的部分，因畢氏定理含有平方根運算，大部分問題都需考慮生活情境而把負的平方根捨去，除非教科書已事先排除負的平方根，否則題目將被視爲需要詮釋或評估的問題。

三、研究程序

（一）決定分析單位

本研究以「任務」作爲分析單位，其中「任務」包括工作例、練習、評量問題。如果一個任務中包含兩個小題，而它們之間並沒有直接關聯將被視爲兩個單位。例如，BR41 是有關心算幾何圖形中線段長度問題的一個小題，其他小題都以不同的幾何圖形作爲題幹，因此 BR41 被視爲獨立的一個單位。相反，如果一系列問題都來自同一個題幹，則它們只會被視爲一個單位。雖然臺灣及新加坡都附有額外的習作，但爲了簡單起見，我們視習作爲教科書的一部分內容，後面敘述提及的「教科書」將包含習作的部分。

（二）確立分析架構

依據文獻整理爲七個數學識能，各包含三個層次（0、1 或 2），而建模歷程則分爲三個階段，子類目共 9 個，並以 0、1 表示是否具備相關的建模歷程特徵。研究者將所有「任務」分別以各個數學識能及建模

歷程中各特徵進行編碼，並記錄在「數學識能分析表」和「建模歷程分析表」。其中，每個「任務」在各個分析類別中，皆只有一個對應編碼。

（三）建立編碼者信度

編碼過程分別由三位能掌握畢氏定理內容及分析架構的編碼者執行。首先，我們隨機在三本教科書中各挑選兩題作試編，針對不一致的地方進行討論及微調架構讓定義更清晰且容易執行。接著，編碼者 A 先將巴西教科書需編碼內容中的葡萄牙文翻譯成英文，再與編碼者一起對 BR 版教科書進行編碼（共 64 個任務），編碼者 A 也同時與編碼者 C 一起對 SG 版教科書進行編碼（共 134 個任務），而編碼者 B 和 C 則一起對 TW 版教科書進行編碼（共 48 個任務）。內部一致性分別爲：BR 版（87%）、SG 版（95%）、TW 版（98%）。不一致的原因主要來自描述任務複雜度的形容詞（簡單／複雜）或是否爲「多」步驟的任務，因個人主觀對複雜與多寡程度的認知不同，因此修改架構中的描述，將「簡單」定義爲畢氏定理的直接應用，而「複雜」亦改爲明確數量的步驟、運算等。上述不一致的部分都會逐一討論，直到兩位編碼者都完全同意爲止。

四、資料處理與分析

本研究以「任務」爲單位，針對臺灣、新加坡、巴西數學教科書中畢氏定理單元進行分析，並統計各細目所占的百分比，並以 Pearson 卡方檢定說明其差異，以瞭解各任務的「數學識能」和「建模歷程」之編寫情況，從而進一步說明其數學素養的內涵。

肆、研究結果

本研究分別從知識內容、數學識能以及建模歷程探討數學教科書中所展現的數學素養內涵。首先，依據內容分析結果，說明各教科書中畢

氏定理內容結構之鋪陳。接著，透過分析數學識能及建模歷程的分布，進一步說明教科書所能展現的數學素養內涵。

一、畢氏定理內容結構

表 5 整理三個版本教科書在畢氏定理單元之內容結構。在內容的安排上，它們皆是介紹直角三角形及其相關元素後，才引出畢氏定理的相關描述、證明、應用及練習。然而在 SG 和 TW 版中，畢氏定理皆是獨立章節，但 BR 版則安排畢氏定理爲「直角三角形和圓的度量關係」的部分內容，由此引出其它幾何圖形可能存在的度量關係（如由正方體的邊長求其對角線長），這樣說明了 BR 版有很多練習都與幾何圖形相關的原因。各版本介紹直角三角形元素的方式也不同，BR 版是直接定義各元素的名稱；SG 版是依據學生已學的大角對大邊的性質，引出斜邊的定義；而 TW 版則以學生常使用之繪圖工具三角板爲例，由此定義斜邊及直角邊。SG 和 TW 版在說明畢氏定理前都先以探索活動方式，讓學生感受直角三角形三邊長的關係，再分別以文字、圖形和符號表示畢氏定理。不過 SG 版是透過直尺測量直角三角形三邊的長度並計算其平方值，從而發現三邊長之間的關係，TW 版則強調直角三角形各邊上正方形面積之間的關係以引出畢氏定理；而 BR 版則沒有探索活動的設計及只使用單一表徵來描述定理。有關畢氏定理的歷史內容，除了畢達哥拉斯的相關典故外，SG 和 TW 版包括古代中國的勾股定理，而 BR 版則描述更多有關古埃及和巴比倫與畢氏定理相關的內容，顯示了東西方文化上的差異。

有關畢氏定理的證明，各版本都主要以切割拼補組成不同的圖形，再用面積保留的概念來證明畢氏定理（如圖 3）。然而，BR 版共提供四個證明方法來說明畢氏定理成立的原因，並建議學生自行尋找更多的方法；SG 版雖只提供了一個證明方法，但鼓勵學生使用網路尋找更多的證明；TW 版則提供兩個證明方法和另一個方法的圖形，並鼓勵學生按

表 5　各國教科書中畢氏定理單元之內容結構比較

內容	BR	SG	TW
直角三角形及其相關元素之介紹	✓介紹畢氏定理的歷史內容後，直接定義直角△的斜邊及直角邊	✓根據大角對大邊性質，斜邊是直角△中最大的角所對的邊	✓以三角板爲例介紹直角三角形，由此直接定義斜邊及直角邊
畢氏定理之歷史內容	✓古埃及人 ✓巴比倫人 ✓希臘人發現定理 $a^2 = b^2 + c^2$	✓古埃及人 ✓巴比倫人 ✓勾股定理	✓古希臘哲學家畢達哥拉斯 ✓勾股定理 ✓周髀算經
探索活動	—	✓繩索 ✓電腦軟體輔助計算	✓三角板
描述畢氏定理所用表徵	✓文字	✓文字 ✓符號 ✓圖像	✓文字 ✓符號 ✓圖像
證明	✓用方格紙說明三邊（邊長爲 3, 4, 5）上之正方形面積之關係 ✓四個證明 ✓建議尋找更多證明	✓一個證明 ✓建議透過網路尋找更多證明	✓用方格紙說明三邊（邊長爲 3, 4, 5）上之正方形面積之關係 ✓兩個證明 ✓建議根據圖形再寫出一個證明方法
應用	✓眞實生活情境 ✓幾何圖形元素	✓眞實生活情境 ✓幾何圖形元素 ✓兩點間距離 ✓畢氏定理之逆定理	✓眞實生活情境 ✓幾何圖形元素 ✓使用三角板作無理數長之線段 ✓平面直角坐標中兩點之距離

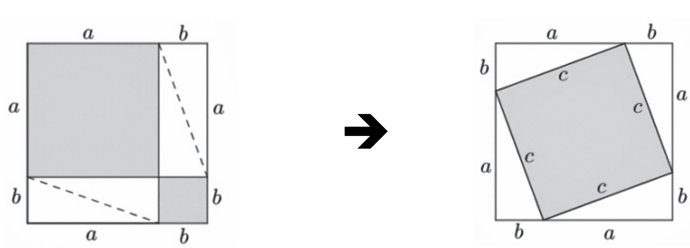


圖 3　畢氏定理證明方法之一

照圖形的切割方式寫出其面積關係以說明畢氏定理。有關畢氏定理的應用與練習，三個版本都有應用於眞實世界情境的問題，以及計算各種基本幾何圖形中不同元素的長度，如等邊三角形的高、長方形或立方體的對角線等。另外，BR 版著重度量關係的應用；TW 版將在直角坐標系中計算兩點距離的公式作爲一個獨立主題，亦有利用三角板畫長度爲無理數的線段的問題，顯示其對不同概念連結的重視；SG 版則強調整個畢氏定理概念的完整性，如畢氏定理之逆定理以獨立一節作較深入的探討及應用。由此可見，教學重點將影響例子和練習的選取，並由此帶來不同培養數學素養之學習機會。

二、數學識能之應用分布

三個版本數學教科書數學識能之應用分布如表 6 所示。由表 6 在畢氏定理單元中各數學識能之分布情形可知，教科書以展現基礎知識爲主，各識能被編爲層次 2 的任務相對較少。同時考慮進行 Pearson 卡方檢定對個別維度中小樣本的限制，因此將各識能中層次 1 和 2 合併，視爲數學識能的進階層次，而層次 0 則屬於基本層次。從基本和進階層次的比較發現，只有「推理及論證」和「使用符號、運算及正式語言」這兩個識能在三個版本的分布沒有顯著差異。

「溝通」識能說明各版本在理解和解釋畢氏定理問題的層次是有顯著差異的（$\chi^2 = 11.173, p = .004$），SG 版在各層次的分布相對平均，它強調理解和解釋關於眞實世界情境以及幾何圖形的元素；TW 版的大部分任務在溝通識能都歸類爲基本層次，顯示它們都只需直接使用畢氏定理進行理解和解釋；而 BR 版只有少數任務是連結到眞實世界情境，較多跟理解和解釋不只一個直角三角形的幾何圖形有關。「數學化」識能說明各版本在轉化眞實世界與數學問題之間的層次是有差異的（$\chi^2 = 7.498, p = .024$），其中 SG 版含有大量較複雜情境的眞實世界問題。「表徵」識能說明各版本在表徵使用上有顯著差異（$\chi^2 = 6.378, p = .041$），BR 版有

表 6　三個版本教科書在畢氏定理單元中數學識能之應用數量與百分比

數學識能	層次	BR	SG	TW	$\chi^2_{(2)}$
溝通	0	14（22%）	45（34%）	25（52%）	11.173
	1	47（73%）	42（31%）	16（33%）	
	2	3（5%）	47（35%）	7（15%）	
數學化	0	54（84%）	91（68%）	38（79%）	7.498
	1	9（14%）	11（8%）	4（8%）	
	2	1（2%）	32（24%）	6（13%）	
表徵	0	28（44%）	79（59%）	20（42%）	6.378
	1	9（14%）	34（25%）	24（50%）	
	2	27（42%）	21（16%）	4（8%）	
擬定策略	0	52（81%）	67（50%）	25（52%）	18.450
	1	12（19%）	56（42%）	22（46%）	
	2	0（0%）	11（8%）	1（2%）	
使用符號、運算及正式語言	0	53（83%）	108（81%）	41（85%）	0.588
	1	9（14%）	19（14%）	4（8%）	
	2	2（3%）	7（5%）	3（6%）	
推理及論證	0	31（48%）	61（46%）	31（65%）	5.220
	1	32（50%）	55（41%）	14（29%）	
	2	1（2%）	18（13%）	3（6%）	
工具使用	0	63（98%）	48（36%）	46（96%）	100.017
	1	1（2%）	86（64%）	0（0%）	
	2	0（0%）	0（0%）	2（4%）	
分析單位總數		64	134	48	

註：1.百分比計算以該國教科書的分析單位總量爲基準。2.卡方值爲各識能層次 1 和 2 合併與層次 0 比較所得。

不少任務的設計是需要學習者自行透過文字敘述進行構圖後再執行計算；而 TW 版則有一半的任務強調視覺和符號表徵的連結或需要對圖像作少量的修改。BR 版在「擬定策略」識能的變化較另外兩個版本少（$\chi^2 = 18.450, p < .001$），主要原因是 SG 和 TW 版有較多題目需重複使用畢氏定理、自行假設未知數、使用多項式展開等策略來解題，這些都屬進階層次的「擬定策略」識能。「工具使用」識能的差異（$\chi^2 = 100.017, p < .001$）主要來自 SG 版要求學習者使用計算器來計算根式，雖然 TW 版也有使用三角板的構圖任務，但數量相對較少。

從數學識能之應用面向來看，各版本教科書編寫都呈現較多基本層次的數學識能，顯示教科書著重發展學生各識能的基礎。相較於 BR 和 TW 版，SG 版有較多進階層次數學識能的學習機會，尤其在溝通、數學化、擬定策略和推理、論證及工具使用識能。在強調數學素養的教科書設計中，這些都是編寫教科書值得參考的面向。

三、建模歷程之展現分布

建模歷程之展現主要由形成數學式子、數學解題、詮釋或評估解答三個過程組成，表 7 說明三個版本在畢氏定理單元中建模歷程相關面向之分布情形。形成數學式子主要包括任務脈絡（「生活情境脈絡」、「新脈絡」）和列式（「需要列式」、「新的列式」、「複雜的列式」）有關。在任務脈絡方面，如同在數學識能的「數學化」面向所呈現的，三個版本在使用「生活情境脈絡」有顯著差異（$\chi^2 = 6.877, p = .032$），其中 SG 版有最高比例（32%）的生活情境脈絡任務。而三個版本都約有一半的任務與例題具有相同脈絡，因此在「新脈絡」面向並沒有顯著不同。在列式方面，大部分的任務都是由學習者自行列式，需以複雜的列式來處理的任務數量也相約，不過在「新的列式」面向卻有顯著差異（$\chi^2 = 9.615, p = .008$），從需要「新的列式」百分比看來，TW 版在與畢氏定理相關任務的列式展現了較多的變化類型。

表 7　三個版本教科書在畢氏定理單元中數學識能之應用數量與百分比

建模歷程	BR	SG	TW	$\chi^2_{(2)}$
形成				
生活情境脈絡	10（16%）	43（32%）	10（21%）	6.877
新脈絡	31（48%）	66（49%）	21（44%）	0.437
需要列式	63（98%）	128（96%）	48（100%）	3.078
新的列式	12（19%）	11（8%）	12（25%）	9.615
複雜的列式	5（8%）	9（7%）	3（6%）	0.121
應用（MPS）				
新的 MPS	23（36%）	36（27%）	18（38%）	2.723
多步驟 MPS	10（16%）	71（53%）	24（50%）	26.016
MPS 內的其他連結	29（45%）	37（28%）	25（52%）	11.650
詮釋或評估				
需要詮釋或評估	64（100%）	114（85%）	30（63%）	29.593
分析單位總數	64	134	48	

註：百分比計算以該國教科書的分析單位總量爲基準。

三個版本在應用歷程中，皆約有三分之一的任務是需要執行一個「新的 MPS」來解決有關畢氏定理的問題。相較於 SG 和 TW 版，BR 版有明顯較少「多步驟 MPS」（$\chi^2 = 26.016, p < .001$）。但 SG 版卻較少任務需要進行「MPS 內的其他連結」（$\chi^2 = 11.650, p = .003$），主要與它的任務雖包括較複雜的圖形，但並不需要借助其他概念來解題。

三個版本在詮釋或評估解答方面有顯著差異（$\chi^2 = 29.593, p < .001$），主要因畢氏定理的計算與根式有關，因此答案中包含了正和負的平方根，其中負的平方根在眞實世界情境或計算長度時必須被排除。然而，TW 版因包含了明確只需要正平方根的說明，如計算直角坐標系中兩點間距離時，並不需對答案加以詮釋。而 SG 版亦因部分任務與畢氏定理的逆定理有關，因此無須討論平方根。因此，不同的應用問題展現不同的機會進行詮釋和評估解答。

從建模歷程之展現的面向看來，三個版本在畢氏定理單元都有著重建模各歷程的任務，且因教科書主要用於幫助建構基礎知識，各版本任務中有不少相同的脈絡、列式及數學解題。不過從分析結果看來，SG 版更著重與生活情境的連結，而 BR 和 TW 版則較多與其他概念連結的任務。在應用畢氏定理運用時，必須考慮負平方根與任務的需要作進一步的詮釋，SG 和 TW 版因應用畢氏定理的逆定理或平面直角坐標中兩點距離計算等任務而不需要作進一步的詮釋或評估，顯示這兩個版本在畢氏定理的應用上變化較多，即提供學生更多經歷不同脈絡或建模需求等增強素養的學習機會。

伍、討論與建議

本研究採取 PISA 的觀點，著重從知識內容、數學識能以及建模歷程，比較臺灣、新加坡及巴西的數學教科書中畢氏定理單元在數學素養內涵的展現。從內容結構方面，如同其他研究（徐偉民、柯富渝，2014；楊德清、鄭婷芸，2015）的發現，新加坡與臺灣所使用的數學教科書在編排上有很多類似的地方。儘管他們的學生在 PISA 評量中有類似的成就，但從數學識能及建模歷程的面向來分析數學教科書，以畢氏定理單元來看卻存在不少差異。從分析結果來看，BR 版教科書強調在不同的幾何圖形中應用畢氏定理，SG 版則較著重眞實世界的應用，而 TW 版則有較多連結畢氏定理與其他數學概念的問題。

從內容結構來看，BR 版沒有任何探索活動給予學生感知畢氏定理意涵的機會，雖然它以一個著色的框框來強調畢氏定理的內容，但卻缺乏圖形和符號表徵幫助學生理解和應用定理，這種強調知識傳授的呈現方式可能與提供學生發展數學素養的機會有關。不過 BR 版提供較多的證明方式幫助學生理解定理的內容，而畢氏定理的證明超過四百多種，鼓勵學生發現不同的證明方式或有助於發展其推理能力，但值得注意的

是，三個版本的教科書都主要以代數方法來證明畢氏定理，這樣可能會讓學生著重在計算技巧而忽略了定理的幾何結構（Tam & Wang, 2012），因此強調幾何方法來證明畢氏定理對發展學生推理及論證識能的幫助值得進一步探討。其中，能將數學知識應用到眞實情境中是 PISA 的核心，即使是最多眞實情境任務的 SG 版，數量也只占全部任務的三分之一，教科書在眞實情境中應用數學知識的設計顯然是不足的（Amaral & Hollebrands, 2017; Gatabi et al., 2012），因此教科書的設計者應考慮增加學習者連結數學與他們日常生活的機會。如同 OECD（2007）指出，眞正有效的教育需要不同的識能來幫助適應現今社會的變遷，因此數學教科書除了強調建模能力外，還應該提供足夠的資源來幫助學生發展不同的識能。例如 SG 版提供較多機會使用工具（如計算器）解決問題，教科書的編寫可針對工具使用的部分進一步加強。

本研究主要提供有關教科書中數學素養內涵分析的想法，但仍必須考慮一些研究限制，從而提出未來的研究建議：包括（一）本研究只選取了每個國家中所使用的其中一個版本教科書作分析，可能不能代表該國家的完整情況，建議分析更多不同的版本加以比對。（二）目前只針對畢氏定理進行探討，分析不同的數學主題將能對數學素養內涵提供更完整的資訊。（三）像 PISA 問題是針對廣泛性的數學內容進行評量，對於單一的主題，未來建議可針對畢氏定理的主題設計類似 PISA 問題作爲評量工具，以說明學生在學習該單元內容的表現與數學素養之間的關係。（四）如同 OECD（2007: 61）提出，「知識、技能和態度是識能發展之始」，未來研究可進一步分析有關教科書中所展現的態度價值觀與學習力等因素，相信可呈現教科書更廣泛的數學素養面貌。

參考文獻

十二年國民基本教育課程綱要（2018）。

左台益（主編）（2012）。**國民中學數學**（一版，第三冊，二上）。臺南市：南一。

左台益、李健恆（2018）。素養導向之數學教材設計與發展。**教育科學研究期刊，63**（4），29-58。

李國偉、黃文璋、楊德清、劉柏宏（2013）。**教育部提升國民素養實施方案——數學素養研究計畫結案報告**。臺北市：教育部。

徐偉民、柯富渝（2014）。臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書幾何教材之比較。**教科書研究，7**（3），101-141。

陳雅華、楊凱琳（2010）。自行閱讀與文本編排對國一學生有關勾股定理的概念、程序與解題表現之影響。**教育科學研究期刊，55**（2），141-166。

曾志朗、柯華葳、李俊仁、陳明蕾（2017）。**105 年度「十二年國民基本教育實施計畫提升國民素養實施方案」**。國家教育研究院研究報告（NAER-105-12-B-2-05-00-1-05）。新北市：國家研究院。

楊德清、鄭婷芸（2015）。臺灣、美國與新加坡國中階段幾何教材內容之分析比較。**教育科學研究期刊，60**（1），33-72。

楊禮黛、林煜廷、陳盈奇、張梅鳳、陳鴻仁（2017）。應用生活情境體驗學習模式探討國中數學畢氏定理學習成效之研究。**中等教育，68**（3），53-67。

臺灣 PISA 國家研究中心（2015）。**臺灣 PISA 2012 精簡報告**。取自 http://pisa.nutn.edu.tw/download/data/TaiwanPISA2012ShortReport.pdf

劉柏宏（2016）。從數學與文化的關係探討數學文化素養之內涵——理論與案例分析。**臺灣數學教育期刊，3**（1），55-83。

Amaral, R. B., & Hollebrands, K. (2017). An analysis of context-based similarity tasks in textbooks from Brazil and the United States. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *48*(8), 1166-1184.

Andrews, P., Ryve, A., Hemmi, K., & Sayers, J. (2014). PISA, TIMSS and Finnish mathematics teaching: An enigma in search of an explanation. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(1), 7-26.

Bronowski, J. (1973). *The ascent of man*. Boston, MA: Little, Brown and Company.

Charalambos, Y. C., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, M. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 117-151.

Dante, L. R. (2010). *Tudo É Matemática-9º Ano* (3rd ed.). São Paulo, Brazil: Ática.

Dym, C. L. (2004). *Principles of mathematical modeling* (2nd ed.). San Diego, CA: Elsevier Academic Press.

Gatabi, A. R., Stacey, K., & Gooya, Z. (2012). Investigating grade nine textbook problems for characteristics related to mathematical literacy. *Mathematics Education Research Journal*, *24*(4), 403-421.

Ilbagi, E. A., & Akgun, L. (2013). An investigation of the mathematical literacy of students aged 15 in terms of PISA 2003 mathematical literacy questions: Results from Turkey. *International Journal of Progressive Education*, *9*(3), 194-217.

Jablonka, E. (2003). Mathematical literacy. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 75-102). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Li, Y., Chen, X., & An, S. (2009). Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: The case of fraction division. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, *41*(6), 809-826.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean theorem: A 4000-year history*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3 rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Athens, Greece: Hellenic Mathematical Society.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 35-55). Cham, Switzerland: Springer.

Ojose, B. (2011). Mathematical literacy: Are we able to put the mathematics we learn into everyday use? *Journal of Mathematics Education*, *4*(1), 89-100.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2007). *Human capital: How what you know shapes your life*. Paris, France: Author.

Organisation for Economic Co-operation and Development. (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics, and financial literacy*. Paris, France: Author.

Ryan, C. (2013). What is behind the decline in student achievement in Australia? *Economics of Education Review*, *37*, 226-239.

Schmidt, W. H., McKnight, C. C., & Raizen, S. A. (2002). *A splintered vision: An investigation of U.S. science and mathematics education*. New York, NY: Kluwer Academic.

Son, J. W., & Diletti, J. (2017). What can we learn for textbook analysis? In J. W. Son, T. Watanabe, & J. J. Lo (Eds.), *What matters? Research trends in international comparative studies in mathematics education* (pp.3-32). Cham, Switzerland: Springer.

Son, J., & Senk, S. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *74*(2), 117-142.

Stacey, K. (2010). Mathematical and scientific literacy around the world. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *33*(1), 1-16.

Stacey, K. (2015). The real world and the mathematical world. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 57-84). Cham, Switzerland: Springer.

Stacey, K., & Turner, R. (2015). The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 5-33). Cham, Switzerland: Springer.

Swan, M., Turner, R., Yoon, C., & Muller, E. (2007). The roles of modelling in learning mathematics. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 275-294). New York, NY: Springer.

Tam, H. P., & Wang, H. H. (2012). On the arrangement of topics in plane geometry in the textbooks of Taiwan: Using Pythagoras theorem as an example. In ICME (Ed.), *Pre-proceedings of the 12th International Congress in Mathematics Education (12th ICME)* (pp. 2319-2327). Seoul, Korea: ICME.

Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience* (pp. 85-115). Cham, Switzerland: Springer.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., Liew, J., & Hong, O. C. (2014). *New syllabus mathematics* (7th ed.). Singapore: Shinglee.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., Liew, J., … Yun, L. P. (2014). *New syllabus mathematics workbook* (7th ed.). Singapore: Shinglee.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *4*(4), 609-626.