

## 臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書 代數教材之比較

徐偉民 曾于珏

本研究以臺灣、芬蘭與新加坡國小數學教科書為對象，探討三國教科書中代數教材呈現的異同。研究對象為臺灣康軒版《數學》、芬蘭 WSOY 版 *LASKUTAITO in English*、和新加坡 MCE 版 *My Pals are Here! Maths* 等三國使用最普及的教科書。本研究以「數學問題」為單位，採用內容分析法，依據數學問題的類型、情境和表徵形式來進行分析比較。結果發現，三國代數問題所占的比例均不高，約占 7%至 13%之間，臺灣和新加坡在例題的說明上較詳盡，芬蘭則以簡潔的方式呈現。三國在問題類型的分布上有一致的現象，都明顯地偏重無連結程序的問題；在問題情境上，臺灣代數問題以情境問題為主，芬蘭和新加坡則是以無情境問題為主；在問題表徵形式上，臺灣以文字型態的表徵為主，而芬蘭和新加坡都是以數學型態的表徵為主。

關鍵詞：內容分析法、代數、國小數學教科書、數學問題

收件：2013年2月27日；修改：2013年4月16日；接受：2013年7月26日

## A Comparison of Algebra Content in Instructional Materials in Elementary School Mathematic Textbooks of Taiwan, Finland and Singapore

Wei-Min Hsu Yu-Jiue Tseng

This study compared the algebra content of instructional materials in the most popular elementary school mathematics textbook series used in Taiwan, Finland and Singapore. The mathematics instructional materials reviewed were KangHsuan *Mathematics*, the WSOY *LASKUTAITO in English*, the MCE *My Pals are Here! Maths* used in Taiwan, Finland, and Singapore, respectively. The research method employed was content analysis. Mathematical problems were the unit of analysis and they were classified based on their cognitive types, contexts and representational forms. Findings showed that the percentage of algebra problems presented in the textbooks in these three countries was not high, only about 7% to 13%. In sample problems, Taiwan and Singapore presented a detailed problem-solving process, but Finland only offered brief descriptions or definitions. We found the ratio of different types of problems in textbooks to be similar in the three countries with most of the problems classified as 'procedure without connection' in each country. As to problem contexts, most algebra problems in Taiwan were contextual problems in nature, but in Finland and Singapore, were classified as non-contextual problems. When the representational forms of problems was examined, we found that most problems were presented in word form in Taiwan, but most frequently in a purely mathematical form in Finland and Singapore.

Keywords: content analysis, algebra, elementary mathematics textbook, mathematics problem

Received: February 27, 2013; Revised: April 16, 2013; Accepted: July 26, 2013

## 壹、研究動機與目的

近年來，學生數學能力的表現逐漸受到各國政府的重視，這從許多國際上舉辦的大型測驗中可以瞭解（如 PISA, TIMSS），且世界上各主要國家也都進行數學教育的改革，來提升學生數學學習的表現與能力，以為未來的公民生活預作準備（Bishop & Forgasz, 2007）。而影響學生數學學習表現最關鍵的便是數學教科書，因為教科書提供了教學的順序與架構（Nicol & Crespo, 2006），是影響教師數學教學的最主要因素（Lloyd, 2008）。Chambliss 與 Calfee（1998）主張教科書是教師教學方案的心臟，應該教什麼，要如何教，幾乎完全決定於教科書；Grouws、Smith 與 Sztajn（2004）的研究發現，教師的教學幾乎都聚焦在教科書內的數學問題；Stein、Remillard 與 Smith（2007）發現數學教科書內容呈現的順序、焦點、和組織的形式，將會影響教師的教學和學生的學習；徐偉民（2011a, 2011b）的研究發現，教師的數學教學幾乎完全採用教科書中的數學問題。教師教學時對教科書有相當大程度的依賴，教科書為教師教學提供了詳細的資訊及正確的答案（Son & Senk, 2010）。因此，美國國家研究協會（National Research Council [NRC], 2004）主張應檢視所提出改革版數學課程的有效性，許多研究也開始投入數學教科書的比較分析（如徐偉民、黃皇元，2012；陳仁輝、楊德清，2010；Charalambous, Delaney, Hsu & Mesa, 2010；Son & Senk, 2010），希望從 Stein 等人（2007）所提出的書寫課程的面向，來了解自己國家數學教科書的特色，以及作為後續進一步探討對學生數學學習影響的基礎。

美國國家數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）認為代數符號及其運算是歷史上傑出的數學成就之一，也是數學學習和研究的關鍵，數學教育學者也都認同代數是基礎數學知識中極重要的主題（Raymond & Leinenbach, 2000；Smith & Philips, 2000；Star,

Herbel-Eisenmann, & Smith, 2000)。Smith 與 Philips (2000) 的研究指出，代數的學習對學生而言具有高挑戰性；Herscovics 與 Linchevski (1994) 認為學生沒有充分理解國小初等代數的概念，將會阻礙學生對未來高深數學的學習。所以，在小學對代數基本概念的理解與建立就極為重要，而且是未來進階數學學習的基礎，這是本研究之所以選擇國小數學教科書中代數教材內容進行分析的主要原因。

國際經濟合作發展組織 (Organisation for Economic Co-operation and Development, OECD) 在 2006 年所舉行的「國際學生評量計畫」(The Programme for International Student Assessment, PISA)，臺灣 15 歲學生在 57 個參與國中名列第一 (OECD, 2007)；PISA 2009 年測驗中，臺灣學生的表現雖略有下滑，但仍然表現亮眼 (在 65 個參與國中名列第五)；在「國際數學和科學教育成就趨勢調查」(Trends in Mathematics and Science Study, TIMSS) 的調查報告中，2007 年臺灣八年級學生獲得所有參加測驗國家的第一名，四年級學生成績排名第三 (Mullis, Martin, & Foy, 2008)。亮麗的國際測驗表現雖然振奮國人，但卻有一些隱憂存在，例如在 PISA 2006 和 2009 年測驗中，臺灣學生得分的級距在前幾名國家中幅度最大，顯示臺灣學生的數學表現較為分散。而同樣在 PISA 2006 和 2009 年測驗中，數學表現優異的芬蘭，不但在 2006 年測驗中未達水準的比例僅占 0.2%，而且學生的表現較為平均且集中。芬蘭的教育水準被 OECD 評為整體表現優異，學生個別學習差異與校際學習差異是全球差距最小的教育體制 (OECD, 2001, 2002, 2003)；而新加坡在 TIMSS 測驗表現中一向亮麗，在 2007 年測驗中四年級學生表現位居第二 (表現顯著優於臺灣)、八年級學生表現位居第三 (臺灣位居第一，但兩國學生之間無顯著差異)，且新加坡於 2009 年首次參與 PISA 測驗便在數學能力表現上居全球第二位 (OECD, 2010)，且學生表現的差異是前幾名國家中差距最小的國家 (標準差為 1.4，臺灣為 3.4)。兩個國家學生在國際測驗中的優異表現，值得進一步分析瞭解，這是本研究之所以選擇芬蘭和新加坡

的國小數學教科書的代數教材進行分析的原因，同時與臺灣數學教材進行比較，以作為後續臺灣數學教科書編修與教師教學的參考。

要進行教科書內容的分析，可以從數學主題概念呈現的邏輯順序與課程設計的元素（如問題和活動的類型、科技和教具的使用等）著手（NRC, 2004）；或是從教科書編輯的主觀編寫的哲學與目的、客觀內容結構與外觀著手（Remillard, 2005）；或是針對教科書中所呈現的數學問題來進行分析（徐偉民、黃皇元, 2012；徐偉民、董修齊, 2012；Stein et al., 2007；Son & Senk, 2010；Zhu & Fan, 2006）。本研究選擇以數學問題來進行分析比較，主要是因為數學問題是數學教科書內容的構成基本單位，會直接影響學生學習數學的方式和結果（Henningsen & Stein, 1997；Stein et al., 2007），而且在進行跨國性教科書內容的比較時，數學問題也是主要的分析單位與指標（如 Zhu & Fan, 2006），以了解對學生數學學習產生的影響。上述的相關研究都共同指出了，數學教科書的內容（數學問題）對學生數學學習的重要影響，且國內數學教科書使用的研究中亦發現，教師在使用時幾乎完全依據教科書中的數學問題來進行教學（徐偉民, 2013），由此更可了解教科書的內容（數學問題）對學生數學學習的關鍵影響。

綜合以上的描述，本研究以臺灣、芬蘭和新加坡三國的國小數學教科書為對象，以數學問題為單位，針對代數教材內容呈現的類型與方式來進行分析與比較，以達成以下三個目的：

一、比較臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書，代數教材編排的特色與內容的比重。

二、探究臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書，代數教材中數學問題類型之異同。

三、探究臺灣、芬蘭、新加坡國小數學教科書，代數教材中數學問題呈現方式之異同。

其中，第一個目的要了解三個國小代數教材編輯的主、客觀特色

(Remillard, 2005)，以及所占的比重；第二個目的從代數問題的高低認知類型中，可以了解學生學習代數時是聚焦在概念的連結或程序的熟練(Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000)；第三個目的從代數問題呈現的情境與表徵中，將可了解學生在學習代數時，是否較有可能進行理解式的學習(Artzt & Armour-Thomas, 2002)。這三個向度是影響學生代數學習的關鍵，因此成爲本研究主要探討的焦點。

## 貳、文獻探討

### 一、臺灣、芬蘭、新加坡的數學課程

#### (一) 三國數學課程的整體目標

臺灣九年一貫的數學課程，強調以學生爲主體，以生活經驗爲重心。整體數學課程的目標，除了希望學生能掌握數、量、形的概念與關係外，更希望培養學生的數學素養、發展解決問題、表達與理性溝通、批判分析及欣賞數學的能力，以成爲未來世界的公民(國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域, 2003)。爲了強調統整與帶著走的能力，《國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域》(2004年公布，以下簡稱92數學課程綱要)將學習主題分爲：數與量、幾何、代數、統計與機率、連結五大範疇，學習歷程分爲四個階段：一～三、四～五、六～七、八～九年級(2008年修訂之《國民中小學九年一貫課程綱要》預計要將四個學習階段修改爲一～二、三～四、五～六、七～九年級)，每個年級均明確列出該年級所應學習的分年目標；而芬蘭在基礎教育核心課程的數學課程中，希望能發展學生創意和精確的數學思考、引導學生去發現、形成問題，並找到解決問題的方法(National Board of Education [NBE], 2004)。芬蘭核心課程將數學學習分成三個階段：一～二、三～五、六～九年級，數學課程的內容包括數與計算、代數、幾何、測量、

資料處理與統計五個主題。芬蘭數學課程綱要以三部分來呈現每個階段數學課程的目標和內容，包括呈現該階段整體數學學習的目標（objectives，如理解概念的結構）、不同數學學習主題的核心內容（core contents，包含數與計算、幾何等）、該階段應學習的思考與工作技能以及在不同學習主題上理想的學習表現（NBE, 2004）；新加坡的課程綱要強調以解題為核心，希望透過解題來發展學生數學思考和推理技能，瞭解數學概念間的連結，以及與其他學科的關聯，同時培養學生對於數學的積極態度、想像力與創造力。意即，發展概念、技巧、過程、態度和後設認知五種相關的能力，是新加坡數學課程的主要目標（Curriculum Planning and Development Division [CPDD], 2006）。其中國小數學綱要包含兩部分：A 部分解釋綱要的哲理與實施的精神，並且詳細說明數學綱要的目標；B 部分則詳列各階段的教學內容，以確保小學至中學課程的連貫性（CPDD, 2006）。

## （二）三國代數課程的目標

臺灣代數課程目標以條列且分階段的方式來呈現應達成的目標：第一階段強調在具體情境和操作中，認識代數的基本概念（遞移律、交換律和互逆關係）和初步方程式概念；第二階段著重在代數初步表徵，以代數符號列出單步驟的方程式和常用的公式；第三階段強調代數符號的進階應用，包括以代數符號表示未知數和變數、熟練一元一次方程式等，希望藉此讓學生理解代數的概念和代數符號使用方法，發展學生以一般化與系統化代數思維解決問題的能力，同時培養學生欣賞代數方法等目標（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003）。雖然臺灣從一年級到六年級都有代數的能力指標，但獨立的代數教學單元直到六年級才正式出現；而芬蘭代數課程的目標，從核心內容與學習後理想表現來看，第一階段強調的是尋找規律和簡單的數列，第二階段著重代數基本概念的表達與以推論的方式來求等式的解，第三階段強調解方程式與多項式的運算與簡化（NBE, 2004）。從這樣的目標來看，可知芬蘭在

代數教材的編排上採循序漸進的鋪陳方式。不過在芬蘭的數學教科書中，從一年級到六年級都沒有代數的獨立單元，但其代數相關的概念問題卻已穿插在每個單元中。例如：在芬蘭二年級的教科書中，就已經有像 $\square + \square + \square = 60$ 這種一連串的推導問題；新加坡的課程綱要中，對於代數的定義非常嚴格，必須涉及到未知數、變數和方程式，才列入代數範圍，因此新加坡代數課程綱要直到小學六年級才有正式代數教學目標，包括了：能簡化代數式、能利用代換的方式計算簡單的代數式、能解決關於代數式的文字題、能利用英文字母代表一個未知數並依給定的情境列出含有一個未知數的代數式等（CPDD, 2006）。但在新加坡一年級數學教科書中，便已經出現 $3 + \square = 12$ 這樣的式子，雖然並沒有強調符號與未知數的想法，但已在為往後的代數概念作鋪陳。

總結來說，三國國小數學課程的總體目標，都在培養學生對數學的基本概念和數學思維，進而發展他們理解數學概念和結構基礎的能力，並能將其所學運用在解決日常生活的問題上。而從三國的代數課程目標來看，代數的學習是建立在數的學習基礎上，雖然臺灣從一年級開始就有代數的能力指標，但從一到五年級的教科書中卻沒有獨立的代數教學單元；而新加坡對於代數的規範極為嚴謹，所以一到五年級都沒有列出代數課程的目標，一直到六年級才出現，但深入檢視其相關教學目標，會發現臺灣於一到五年級所列的代數能力指標，在新加坡都已被列入一到五年級的「整數」主題中（陳仁輝、楊德清，2010）；而芬蘭在代數課程上雖有明確的階段性目標，但在其國小數學教科書 12 冊中卻都沒有將代數課程獨立出來的單元。相較三國的代數課程目標，發現臺灣在每個年級都有列出不同的代數學習能力指標，芬蘭只有列出階段性的代數學習目標，而新加坡直到六年級才有代數課程目標。因此，本研究決定以臺灣 92 數學課程綱要中對代數的定義與能力指標為基準，做為是否選定為代數問題的標準，包括代數的基本概念，如遞移律、交換律和互逆關係；代數的初步表徵，如以代數符號列出單步驟的方程式和常用的



公式；以及代數符號的進階應用，包括以代數符號表示未知數和變數等。

## 二、數學問題的類型和呈現方式

研究發現，代數對學生而言，相較於算術，更為抽象，尤其是等號在代數和算術中不同的意義和未知數的使用，更是學生在學習代數時最容易產生迷思和混淆的部分（Kieran, 1992; Pimm, 1995）。而影響學生數學學習最關鍵的便是教科書呈現的內容與方式（Stein et al., 2007），而數學問題又是數學教科書組成的基本單位（徐偉民，2013）。因此，以下就從數學問題的類型和呈現的方式來說明，以瞭解過去研究中所採用的分析類別，以作為本研究分析時的參考。

### （一）數學問題的類型

Stein、Smith、Henningsen 與 Silver（2000）從解題時所需要付出的認知需求（cognitive demand）的觀點，將數學問題依解題時所需要的認知負荷程度由低到高分為：記憶型（memorization）、無連結程序型（procedure without connection）、具連結程序型（procedure with connection）、和作數學（doing mathematics）等四類型的問題。其中，前兩類屬於低認知需求的數學問題，學生只要透過記憶事實或公式演練就可以成功解題，這兩類問題著重在基本事實與計算技巧的熟練，學生解題時所需的認知需求並不高；後兩類屬於高度認知需求的問題，強調概念和程序意義的連結、問題的探索、推理與應用，因此學生必須要在思考與探索之後，選擇適當的策略或表徵，才能解決問題。Stein 等人（2000）對各類型數學問題的定義和範例如表 1。

不同類型的數學問題，不僅影響學生數學學習焦點、數學能力的發展，同時對其數學態度的養成都會有所影響。國內外的相關研究，也呼應了問題類型對學生數學學習的影響：Henningsen 與 Stein（1997）的研究發現，課堂中實施的低認知問題使學生的數學學習聚焦在程序的熟練，以低認知的方式來學習數學；Stein 等人（2007）也指出，美國傳統

表 1 各類型數學問題的定義與範例

數學問題	定義	範例
記憶型	透過記憶事實、公式或定義來解題，時間短到不需使用程序	將 $1/2$ 和 $1/4$ 化成小數（學生記憶 $1/2=0.5$ , $1/4=0.25$ ，不需計算）
無連結程序型	在有限的認知需求下，使用運算的程序來解題，焦點在於計算的正確	將 $3/8$ 化成小數（學生需用直式除法來計算出 $3/8=0.375$ ）
具連結程序型	強調意義的連結，解題焦點除了程序的使用外，也強調發展數學概念的理解	使用百格板、小數和百分比來表示 $3/5$ （學生使用圖形、小數和百分比來呈現）
作數學	需要複雜、非計算的思考，沒有固定的程序或方法，需要探索和瞭解數學概念和關係才能解題	在 $4 \times 10$ 方格中有 6 小格塗上陰影，請解釋陰影部分所占的百分比、小數、分數（學生需要提出完整的說明）

資料來源：整理自 Stein et al. (2000: 16)。

數學教科書以低認知問題為主，使教師以講述方式進行教學，學生學習的焦點在於解題技巧的熟練。而高認知問題的實施，Silver、Mesa、Morris、Star 與 Benken (2009) 的研究發現，教師會採取開放且雙向的互動方式，要求學生思考、討論和探索，從中來創造解題的方法並理解數學的概念。而國內的研究（徐偉民，2011a，2011b）亦發現，低認知的問題實施時，教師大都以封閉且有固定答案的問題與學生互動，學生沒有太多思考與表達的機會；但是在實施高認知問題時，則教師採用較開放的問題與學生互動，要求學生思考、解釋自己的解題方法並進行不同解法之間的比較等。由此可知，不同類型的數學問題，教師將有不同的教學焦點，學生也會有不同層次和不同類型的思考（Stein et al., 2000），因而影響到學生數學學習的結果和對於數學本質的觀點。意即，數學問題類型是影響數學教與學的關鍵。因此，本研究決定以 Stein 等人（2000）對於數學問題類型的分類，來進行臺灣、芬蘭和新加坡教科書的分析，以瞭解三國教科書中代數教材數學問題類型編排的特色，以及對數學的教與學可能產生的影響。

## （二）數學問題的呈現方式

教科書中數學問題的呈現方式，通常包括了問題本身的表徵形式，以及問題的背景是否和學生的生活情境有關（Lesh, Post, & Behr, 1987）。NCTM（2000）指出表徵在數學學習過程中，提供學習者有效的解題工具，幫助學生達成數學知識的理解，和他人溝通以及推理的目的。如果能夠建立表徵之間的連結與轉換，將有助於學生產生有意義的學習。而許多研究也指出，數學問題的情境若能更貼近學生的生活經驗，將有助於學生數學的理解與學習（Anderson, 2003; Ensign, 2005; Gutstein, 2003）。以下，針對問題的表徵與情境兩方面，來說明數學問題可能的呈現方式。

### 1. 數學問題的表徵形式

Zhu 與 Fan（2006）針對中國大陸與美國教科書之問題型態和表徵形式進行比較研究時，將數學問題分為七類：例行性與非例行性問題；傳統與非傳統問題；開放性與封閉性問題；應用與非應用問題；單步驟與多步驟問題；充足條件、無關條件與條件不足問題；數學型態、文字型態、視覺型態與聯合型態問題（指數學問題的表徵型態）等。結果發現，兩國教科書中呈現的數學問題類型和表徵型態都有所差異。其中，前六類的問題涉及到解題的難易程度，與學生解題時所需要的認知需求有關，這和 Stein 等人（2000）對高低認知問題分類的標準類似，其對學生數學學習的影響前已敘述，不再贅述。表徵不但可以幫助學生解題、與他人溝通以及推理，而且如果能夠建立表徵之間的連結與轉換，將有助於學生產生有意義的學習（Perkins, 1998）。由此來看，如果問題以聯合型態來呈現，學生能進行表徵間的連結，比較容易達成理解的目的；如果以單一型態來呈現，如數學型態，則學生需要理解符號的意義與運算的規則，而文字型態則需要學生理解文字的意義，並將數量的關係釐清後再改寫成數學型態的算式，並應用相關的規則或程序才能解題。一般而言，文字型態的表徵是較難的，視覺型態由於是半具體圖形的呈

現，可以降低學生理解或解題時的難度。因此，本研究將採用 Zhu 與 Fan (2006) 對問題表徵形態的分類，來分析臺灣、芬蘭和新加坡教科書的代數教材內容，以瞭解三國教科書中代數教材呈現的特色。

## 2. 數學問題的情境

Lesh 與 Lamon (1992) 主張，數學學習是一個適應文化的歷程，教學應提供貼近學生的真實生活經驗的範例，讓學生能置身於與每日生活情境相關聯的情境中學習，才能將所學習的知識和技能應用在生活問題的解決。Anderson (2003)、Barton (2009)、D'Ambrosio (1985) 都主張數學的學習應與學生的文化經驗相連結，才能提升學生數學學習的表現。由此來看，可以將數學問題的呈現分為有情境和無情境兩種類型。而研究上也發現，增加真實情境問題的數量，能促進教科書問題的多樣化，幫學生形塑一個有利於更高層次理解的學習環境 (Gu, Huang, & Marton, 2004)。強調生活情境與數學相連結，培養學生在真實情境中解決數學的能力是當前數學教育的趨勢 (Lesh & Lamon, 1992; NCTM, 1989, 2000)。因此，本研究參考 Lesh 與 Lamon (1992) 的主張與分類，將數學問題分為有情境問題和無情境問題來進行分析，以瞭解三國教科書代數教材數學問題另一種呈現的特色。

## 三、數學教科書研究的重要

在美國政府提出“*No Child Left Behind*”的政策，以及 NCTM (1989) 出版 *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* 一書後，數學教育界開始重視課程與學生數學學習結果之間關係的研究，以檢驗所提出或發展課程的有效性 (Stein et al., 2007)。這個結果使得國內外許多研究者投入數學教科書的分析和比較的研究，包括徐偉民和徐于婷 (2009)、陳仁輝和楊德清 (2010)、以及楊德清、施怡真、徐偉民、尤欣涵 (2011)，都進行跨國性數學教科書的比較，透過內容分析的方法，來瞭解臺灣與其他國家教科書在不同數學主題上編排和呈現的異同；Zhu 與 Fan

(2006), Charalambous、Delaney、Hsu 與 Mesa(2010), Son 與 Senk(2010) 等研究者也進行跨國數學教科書不同主題數學問題的比較分析。透過跨國性的比較分析, 希望可以更瞭解到自己國家數學教科書的特色與不足之處, 以及對教師教學和學生學習可能產生的影響。這正如同 Floden (2002) 所指出的, 在傳統課室教學中, 教科書對於學生的學習成就具有決定性的地位, 也因此 Törnroos (2004) 才主張, 進行教科書分析對於提升學生學習數學有很大的助益。這也是本研究之所以選擇國際測驗中表現優異國家的教科書進行分析的原因, 希望能藉此對臺灣國小數學課程中代數教材的特色有更一步的理解, 以作為未來教師教學或課程編修的參考。

此外, 在過去教科書相關的研究中, 除了徐偉民與徐于婷 (2009)、徐曉慧 (2010) 的研究外, 少有研究者針對代數的主題進行教科書的分析, 但國小代數是往後在國中代數學習的基礎, 而且在林碧珍 (2003) 的研究中提到, 臺灣國小四年級的學生在代數方面的學習明顯落後於其他主題。代數的抽象性質, 很容易讓學生在學習上遇到困難, 由此可見國小代數教材研究的重要。本研究除了和國際測驗表現優異的芬蘭與新加坡數學教科書進行比較外, 也針對數學問題的類型與呈現方式進行分析, 這是和之前相關研究不同之處。希望藉由臺灣、芬蘭、新加坡三國國小數學教科書代數教材的分析與比較, 提供教師教學與未來相關研究的參考。

## 參、研究設計與實施

### 一、研究方法

本研究採用內容分析法 (content analysis), 內容分析又稱為資訊分析 (informational analysis) 或文獻分析 (documentary analysis), 在許多研究領域中, 常需要透過文件的分析來獲得資料, 因此內容分析常被使

用在文件分析的研究中（王文科，2002）。NRC（2004）也提出課程評鑑和比較的架構，指出若是要針對教科書的內容進行分析，建議採用內容分析的方法。這是本研究之所以選擇內容分析為研究方法的主要原因。歐用生（2000）認為內容分析法為透過量化的技巧以及質的分析，採客觀與系統的態度，進行文件內容的研究及分析，藉以推論產生該文件內容之環境背景和意義的一種研究方法。所以本研究先採用定量分析的方式加以統計，以比較臺灣、芬蘭和新加坡國小數學教科書中數學問題類型分布的情形；再結合定量定性的分析方式，探討三個國家數學問題呈現方式的異同。

## 二、分析單位與類目

### （一）分析單位

分析單位是內容量化時分析計數的標準。常用的分析單位有字、主題、人物、項目、時間與空間單位、課、章、段、詞、句、頁等。研究者根據其研究目的，考量理論或過去研究結果，或自行視需要與分析對象的性質來決定分析的單位（歐用生，2000）。由於數學教科書沒有章、節的分類，而單元包含的概念很多，以詞、句、字為分析單位時，又因數量過多，易於斷章取義，趨於瑣碎。因此，本研究以數學教科書組成的基本單位「數學問題」為分析單位，將數學問題依本研究所採用的分析類目進行分類計數。分析範圍僅限於教科書，習作和教學指引不列入。若問題敘述僅包含一主要問題，且只有一個數字編號，如圖 1，計數為一題；若一個問題包含數個子問題，每個子問題有各自的數字或英文編號，則各子問題分別計數為一題，如：圖 2 計數為 3 題。

### （二）分析類目

分析的類目應力求周延、互斥與獨立（王文科，2002）。一般而言，內容分析的類目可以分成「說什麼」類目（“What is said” categories）：測

3 Refer to the table below. What is Mr Tan's age in terms of  $x$ ?

	Mr Tan's age (years)
Now	$x$
In 3 years' time	<input type="text"/>
In 4 years' time	<input type="text"/>
In 7 years' time	<input type="text"/>
In 10 years' time	<input type="text"/>
In 15 years' time	<input type="text"/>

圖 1 新加坡單一數學問題範例

資料來源：Fong, Gan, & Ramakrishnan (2010：3)。

5 爸爸比媽媽大 2 歲，叔叔比媽媽小 3 歲。

(1) 媽媽今年 30 歲，爸爸和叔叔今年各是幾歲？

(2) 當媽媽 40 歲時，爸爸和叔叔各是幾歲？

(3) 當媽媽  $z$  歲時，爸爸和叔叔各是幾歲？用式子記記看。

爸爸是  $z+2$  歲

叔叔是  $z-3$  歲

圖 2 臺灣題組式數學問題範例

資料來源：楊瑞智（主編）（2009：35）。

量內容的實質部分，包含主題、方向、特徵、目標、人物、方法、標準等；「如何說」類目（“How it is said” categories）：測量內容的形式，包含傳播類型、敘述形式、感情強度、策略等四類。而本研究目的在於探討三個國家代數問題的類型和呈現方式，其中問題類型涉及到代數學習的目標與焦點，是屬於「說什麼」類目中的價值類目（目標類目）。此部分將採用 Stein 等人（2000）的分類標準，將數學問題分為記憶型、無連結程序型、具連結程序型、以及作數學四類型。在進行問題歸類時，將根據表 1 的定義和範例，來作為歸類的依據，各類型的範例如圖 3 至圖 6；而問題呈現方式涉及問題呈現的表徵型態和背景，是屬於「如何說」類目中的敘述形式類目。此部分將採用 Zhu 與 Fan（2006）對數學問題表徵形式的分類，將問題的表徵形式分為數學型態（問題的主軸只包含數學符號的表徵，如圖 4）、文字型態（問題的主軸全為文字敘述，如圖 2）、視覺型態（問題的主軸簡明地由插圖、圖像、圖表等來表徵，如圖 1）、和聯合型態（問題的主軸呈現出兩種或三種之表徵形式，如圖 7）四種類型。同時也採用 Lesh 與 Lamon（1992）將問題分為情境問題和非情境問題，前者指的是問題以學生所能夠經驗與理解的情境來呈現（如圖 5），後者指的是未包含任何情境的純數學問題（如圖 4）。

### 三、研究對象

#### （一）臺灣康軒版《數學》

臺灣中小學九年一貫數學領域的學習，重視循序漸進的邏輯結構，強調數學知識、演算能力、抽象能力及推論能力的培養（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003）。康軒版數學教材的發展是從數學知識觀點引發，教材的設計與組織以現實生活的題材為中心，並參考 Piaget 的兒童認知發展理論來設計和學生有關的學習教材，多是從具體操作著手（康軒教育網，2007）。康軒版國小數學教科書在 98 學年度市占率達 36.38%（康軒教育網，2011）。康軒數學每學期一冊，共有 12 冊



(99 學年度上學期與 98 學年度下學期學校用書，一上、二上、五上為 2009 年出版，3 下是 2008 年出版，其餘皆為 2010 年出版)，其中代數單元為本研究分析對象。康軒數學每個單元後面都會有練習百分百，且每冊都會有兩個「數學步道」或「學習廣角」，這些部分都將納入本研究分析的範圍。本研究僅就課本 12 冊的內容為分析範圍，習作、教學指引等並不列入分析。


● **活動一** 文字符號和數字的計算 ■ 配合習 28、29

① 一個水果籃重 50 公克。

裝入 100 公克的水果後，總重量是  $100+50$  公克；  
 裝入 200 公克的水果後，總重量是  $200+50$  公克；  
 裝入 300 公克的水果後，總重量是  $300+50$  公克；  
 裝入  公克的水果後，總重量可以怎麼表示？

+ 50 公克

上題用  表示裝入水果的重量，我們也可以用甲、乙、丙或  $x$ 、 $y$ 、 $z$  等文字符號來表示。例如：用  $x$  表示裝入的水果重，加上水果籃後的總重量，就記成  $x+50$  公克。



### 圖 3 記憶型問題範例

資料來源：楊瑞智（主編）（2009：34）。

Choose two equations from each group and solve them

for  $x$

113. a)  $66 + x = 78$

b)  $79 + x = 93$

c)  $x + 58 = 84$

d)  $x + 49 = 94$

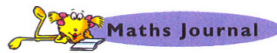
### 圖 4 無連結程序型問題範例

資料來源：Saarelainen（2010：22）。

123. Morris has some postage stamps.  
He gives Nora 25 and Kim 28.  
Morris is left with 219 postage  
stamps. How many stamps  
did Morris have at the beginning?

圖 5 具連結程序型問題範例

資料來源：Saarelainen (2010 : 23)。



Write two story sums that have the following expressions as answers.

a  $m - 20$

b  $5m$

圖 6 作數學型問題範例

資料來源：Fong et al. (2010 : 11)。

Write the target numbers on the balls that give

2. a total of 12 points      7. a total of 27 points

○ ○      ○ ○ ○

圖 7 聯合型態數學問題範例

資料來源：Saarelainen (2010 : 23)。

## (二) 芬蘭 WSOY 版 *LASKUTAITO in English*

芬蘭在 2004 年完成新的基礎教育國家核心課程綱領，其中數學教育的任務在於發展學生數學思維、概念理解和解決問題的能力（NBE, 2004）。WSOY 所發行的 *LASKUTAITO in English* 教科書目前約占芬蘭國小數學教科書市場六至七成以上，這套教材的編寫歷史已達 18 年之久，目前是芬蘭最大的教科書出版商（陳之華，2010）。本研究欲研究的對象為一至六年級，1 至 12 冊的數學教科書代數教材部分。本研究所使用的芬蘭 WSOY 版數學教科書中 5A 和 6A 為 2010 年出版，其於冊別均為 2009 年出版。在 WSOY 版每個教學單元中都會穿插一些“Notebook exercises”，此部分納入本研究分析的範圍。但在每冊後面的“Homework”和“Additional exercises”，類似臺灣的習作，考量和其他兩國比較的公平性，這兩部分將不列入研究分析的範圍。

## (三) 新加坡 MCE 版的 *My Pals are Here! Maths*

新加坡在 2001 年教育改革後頒布新的數學綱要，教材也從原本的統一版本開放至六種版本，在綱要中強調概念性的理解、技巧的熟練及思考的技能在數學上的教學（CPDD, 2006）。*My Pals are Here! Maths* 系列是新加坡 Marshall Cavendish Education（MCE）公司因應教育改革而編製的一套國小教材，為了讓學生有系統的學習數學概念，並透過課堂的綜合活動反覆的練習重建數學的知識，教材的設計讓學生不需藉由具體的操作，便能發展出抽象的概念，並且提供非例行性的數學問題鼓勵學生在解題中進行思考（吳麗玲、楊德清，2007；張琇涵，2006）。目前 *My Pals are Here! Maths* 是新加坡小學教材中使用率最高的，約占 60%（吳麗玲、楊德清，2007）。這套教科書之前的版本是「基礎數學」，基礎數學正是新加坡學生在 TIMSS 1995、1999、2003、2007 年國際數學成就評量中所採用的教材，因此很多數學教育學者都有興趣進一步了解這套教材編寫有何獨特的地方。本研究的研究對象為一至六年級，1 至 12 冊的數學教科書代數教材內容。本研究所使用的 MCE 版的數學教科書中，3A、3B、

4A、4B 爲 2008 年版，2B 爲 2009 年版，其餘均爲 2010 年版。每個單元後面常會有“Put On Your Thinking Caps!”，這部分會納入本研究的分析範圍。

## 四、本研究的信效度考驗

### (一) 信度考驗

歐用生(2000)認爲信度將會直接影響內容分析的結果，所以至少要有兩個編碼員，以獨立自主的立場，共同分析資料。當不同編碼員的一致性愈高時，內容分析的信度也愈高；反之，不同編碼員一致性愈低，內容分析的信度也愈低，而且內容分析的信度應該要在 0.8 以上。因此本研究以「相互同意度」進行信度檢定，邀請兩位評分員（均爲主修數學教育的研究生），連同本研究第二作者三人，進行「評分員的一致性」的信度檢定。本研究進行信度分析的過程和步驟如下：

1. 選取樣本：從各國的一年級、四年級、六年級各選取一個單元來做研究的樣本，分別是臺灣康軒版一下第二單元 20 以內的加減、四下第八單元周長與面積、六下第三單元列式與等式；芬蘭 WSOY 版 1B 第一單元 Addition and Subtraction with Numbers 0-20、4A 第四單元 Geometry、6A 第一單元 Revision and Practice；新加坡 MCE 版 1B 第十二單元 Numbers to 40、4B 第十二單元 Area and Perimeter、6A 第一單元 Algebra 來做樣本。

2. 說明：將分析類目表及其定義分給評分員閱讀，說明歸類的方式及原則，並針對類目表中的問題加以釐清。

3. 歸類：兩位評分員與研究者，獨立將單元的數學問題進行類目歸類的工作。

4. 信度計算：將歸類的結果利用公式進行信度的計算，其公式如下（歐用生，2000）：

(1) 相互同意值 ( $P_i$ )

$$P_i = \frac{2M}{N_1 + N_2}$$

M：表示兩人共同同意項目數， $N_1$ 、 $N_2$ ：每位評分員同意的項目數

(2) 平均相互同意值 ( $P$ )

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$

N：表評分者兩兩相互比較總次數

(3) 信度 ( $R$ )

$$P = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{N}$$

N：評分員總人數

(4) 信度結果

研究者與兩位評分員的之間的相互同意值如表 2。

## (二) 效度考驗

爲了使本研究效度提升，使分析的結果能充分反映三國教科書中代數教材的特色，以及達成本研究目的，因此首先根據理論和三國數學代數課程的內容，來形成代數問題的判斷依據（來自臺灣對代數範疇的定義），以及代數問題類型和呈現方式的分析類目。之後，再邀請兩位同樣具有教科書分析經驗的研究生進行歸類分析，針對分析過程中遇到的判斷和歸類問題，不斷進行討論與重新檢視其定義，最後形成共識並取得良好的信度值後進行正式分析。在整個類目形成以及初步分析和討論的過程中，不斷和一位具有數學教育專長的大學教授進行討論與確認，希望藉由專家的檢視來提升分析結果的有效性。意即，本研究的類目形成和分析，除了具有理論的依據、試行分析、修正與確認的步驟外，也具有專家意見的討論與審核，使本研究分析的結果更具可靠性。

表 2 本研究各類目分析信度結果

數學問題類型			數學問題表徵形式			數學問題情境		
評分員	甲	乙	評分員	甲	乙	評分員	甲	乙
乙	0.91		乙	0.96		乙	0.99	
研究者	0.90	0.90	研究者	0.89	0.94	研究者	0.99	0.99
平均相互同意值 P=0.90 信度 R=0.96			平均相互同意值 P=0.93 信度 R=0.97			平均相互同意值 P=0.99 信度 R=0.99		

## 五、資料分析與處理

本研究的分析，以數學問題為單位，以臺灣康軒版《數學》、芬蘭 WSOY 版 *LASKUTAITO in English* 和新加坡 MCE 版 *My Pals are Here! Maths* 1 到 12 冊的代數教材為分析範圍，將每個數學問題進行分類與登錄。本研究共有三個分析類目，每個問題都進行三次的歸類，一次是依據 Stein 等人（2000）對數學問題認知需求的分類，一次是依據 Zhu 與 Fan（2006）對問題表徵形式的分類，一次是依據 Lesh 與 Lamon（1992）對真實情境的定義，來進行三國國小代數教材數學問題分類，並將結果分類登錄於隸屬的類目中。意即，本研究的分析是以定量分析為主，主要統計數學問題在各類目（問題類型、表徵形式、和問題情境）的分配次數和所占的百分比，以瞭解三國數學教科書中代數教材編排的特色。除了定量的分析外，本研究也採定性分析，針對三國代數教材內容的編排方式進行質性的分析比較，以求更深入了解三國代數教材呈現的異同。

## 肆、研究結果與討論

### 一、三國代數教材版面編排與內容比重

#### （一）三國代數教材版面編排之比較

由於芬蘭和新加坡幾乎沒有以代數為單元名稱（芬蘭完全沒有，新加坡在 6A 有一個），而是大都將代數問題融入在相關主題中，因此無法以「代數單元」為單位來進行代數教材版面編排的比較，只能比較整體的單元編排特色。三個國家在每個單元的首頁都會呈現該單元的名稱，但臺灣還額外增加一個情境頁，使用情境的方式去引起學生的學習動機，以及情境中所涉及該單元的學習內容，芬蘭和新加坡則是直接進入數學問題。在單元結束後，三國都會提供練習題供學生練習，但芬蘭會設計“Decide for yourself”和“Brain-teasers”兩部分：“Decide for yourself”是讓學生可以自己決定要用什麼方式去解決問題，“Brain-teasers”則大多是運用邏輯思考推理的問題，讓學生去深入思考。而新加坡除了練習題外還設計“Math Journal”讓學生釐清該單元的觀念，也有“Put on Your Thinking Caps!”讓學生思考比較困難的問題，而臺灣則是沒有這類型問題的規劃。

再從問題的種類來看，三國的代數問題都可以分為例題和練習題兩種，先呈現例題讓教師來進行教學，再呈現練習題讓學生練習。臺灣和新加坡例題呈現的方式類似，都會呈現完整的解題過程，以不同的人物對話來引導學生歸納概念或提示計算的方法。不過臺灣會呈現人物思考的過程或不同的想法，而新加坡則是提醒解題的方法，或是拋出一個問題。而芬蘭在例題的部分，則是一開始就用一個方框說明此教學活動的重點概念或數學定義，例題就在方框中，利用簡單的一至二個舉例，將過程和觀念利用文字搭配算式，或是圖片來說明。練習題的呈現方式上，三國並沒有很大的不同，都出現在例題之後，包括了計算題、文字題和圖表題等。整體來看，臺灣和新加坡在版面編排上較為類似，包括目錄和例題的呈現方式，而芬蘭的版面編排較為簡單，而例題的數量也遠少於臺灣和新加坡。

## （二）三國代數教材內容比重之比較

檢視三國教育部所頒訂的數學課程綱要代數學習的目標，發現臺灣

和芬蘭的數學課程一至六年級都有代數學習目標，而新加坡則是六年級才出現代數學習目標。但詳細分析三國教科書的內容則發現，三國 12 冊中每冊都有出現代數相關的問題。

從題數來比較三國代數教材內容的比重，則發現臺灣共有 647 題代數問題，五、六年級的題數最多（127 和 208 題），略有隨年級增加的趨勢，占有題數的 13.17%；芬蘭代數問題有 910 題，二、三年級的題數較少（129 和 69 題），其餘年級題數相近（171~186 題），占有題數的 7.57%；新加坡代數問題有 694 題，一至三年級題數相近（137~149 題），四、五年級題數最少（14 和 75 題），六年級最高（184 題），占有題數的 10.17%。從代數問題所占的比例來看，臺灣題數雖最少，但代數比例卻占最高，而芬蘭代數問題數量最多，但因其所有問題高達 12018 題，所以代數比例反而最低，而新加坡在題數和比例上都居中，三國代數教材內容所占的比重如表 3。

## 二、三國代數問題類型之比較

表 4 是三國代數問題類型的分布情形。從表 4 來看，三國代數問題的類型（依解題認知需求負荷高低）均以低認知的問題為主，臺灣、芬蘭和新加坡代數教材中低認知問題所占的比例分別是 68.78%、87.58%、85.30%，其中又以無連結程序型問題居多，而且三國各類型所占的比例上，由高到低的順序都是無連結程序型、具連結程序型、記憶型和作數學。從各類型問題所占的比例來看，記憶型問題臺灣最高（7.42%），芬

表 3 三國代數問題數量與百分比表

項目	臺灣	芬蘭	新加坡
代數問題數量	647	910	694
所有問題數量	4,914	12,018	6,827
代數問題比例	13.17%	7.57%	10.17%



表 4 三國代數問題類型題數與所占比例表

問題類型		臺灣		芬蘭		新加坡	
低認知需求	記憶型	48 (7.42%)	445 (68.78%)	9 (0.99%)	797 (87.58%)	45 (6.48%)	592 (85.30%)
	無連結程序型	397 (61.36%)		788 (86.59%)		547 (78.82%)	
高認知需求	具連結程序型	202 (31.22%)	202 (31.22%)	113 (12.42%)	113 (12.42%)	93 (13.40%)	102 (14.70%)
	作數學	0 (0.00%)		0 (0.00%)		9 (1.30%)	
總計		647		910		694	

蘭最低（0.99%）；無連結程序型問題芬蘭最高（86.59%），臺灣最低（61.36%）；具連結程序型問題臺灣最高（31.22%），芬蘭最少（12.42%）；作數學型問題只有新加坡有，所占比例也很低（1.30%）。整體來看，臺灣高認知代數問題比例最高，且有隨著年級增加而所占比例增加的趨勢（一至六年級分別為 12.35%、23.33%、27.27%、40.28%、34.65%、37.50%），是芬蘭和新加坡的兩倍多，芬蘭和新加坡在高低認知代數問題所占的比例相近，而且並未有隨年級增加而增加高認知代數問題比例的趨勢。從記憶型問題來看，臺灣和新加坡所占比例差異不大，兩國有 7.42% 和 6.48% 比例的問題讓學生學習代數的定義和概念；無連結程序型問題雖然都是三個國家最多的，但新加坡在此類型的問題比臺灣多 17.00%，芬蘭比臺灣多 25.00%，芬蘭有 86.59% 的代數問題，都是讓學生進行代數運算技巧的練習和熟練；具連結程序型問題的比例臺灣最高，超過三成，而芬蘭和新加坡此類型問題只占 12.00%~13.00%，臺灣具連結程序型的問題比例為芬蘭和新加坡的兩倍多，讓學生有更多的機會可以進行概念之間的連結和意義的理解；最高層次作數學的問題，臺灣和芬蘭代數教材都沒有出現此類型的問題，新加坡也只有 9 題，可見三國開放性思考的代數問題都極為有限。

### 三、三國代數問題呈現方式之比較

從三國教科書中代數教材例題和練習題的分布情形來看，可以發現臺灣和新加坡在例題的題數和所占的比例上較相近（臺灣和新加坡的例題數分別是 213 和 274 題，占總題數比例分別為 32.92%和 39.48%），而芬蘭例題所占的比例很低（29 題，占總題數的 3.19%），明顯地與臺灣和新加坡有所差距；在練習題上，芬蘭無論在題數和比例上（881 題，占總題數的 96.81%），都遠高過臺灣和新加坡（分別是 434 和 420 題，占總題數比例分別為 67.08%和 60.52%）；再從練習題和例題的比例來看，臺灣和新加坡在一題例題講解後，大約提供兩題的練習題讓學生練習，而芬蘭則是提供高達 30 題的練習題給學生練習。整體來看，臺灣和新加坡使用較多的例題來做說明與示範，而芬蘭則是在簡短的例題示範後，便提供學生大量的練習，而且是聚焦在運算過程和技巧的練習。以下針對三國代數問題的表徵形式與問題情境進行分析比較。

#### （一）三國代數問題表徵形式之比較

問題表徵的形式，將會影響學生對於問題的理解與學習，一般而言，具體和半具體的表徵，對學生而言是比較容易理解與學習，文字與符號的抽象表徵較為困難。從表 5 來看，發現臺灣代數問題的表徵以文字型態為主，占 52.09%，視覺型態呈現的比例最低（8.81%）；芬蘭和新加坡的代數問題則都以數學型態的方式來呈現（分別占 73.85%、61.53%），芬蘭以文字型態呈現的比例最低（5.16%），新加坡以視覺型態和聯合型態呈現的比例均不超過 10.00%。三國差異最大的是文字型態和數學型態呈現的比例上，臺灣明顯地以文字為主要的呈現方式，符號為輔，視覺型態的呈現最少；芬蘭則明顯地重符號而輕文字的呈現，新加坡則以符號為主、文字為輔的呈現方式。三國視覺型態呈現的比例上接近，而臺灣則有較高的比例以聯合型態來呈現代數問題。

表 5 三國代數問題表徵形式分布表

問題屬性	臺灣	芬蘭	新加坡
數學型態	155 (23.96%)	672 (73.85%)	427 (61.53%)
文字型態	337 (52.09%)	57 (5.16%)	135 (19.45%)
視覺型態	57 (8.81%)	102 (11.21%)	63 (9.08%)
聯合型態	98 (15.15%)	89 (10.77%)	69 (9.94%)
總計	647	910	694

## (二) 三國代數問題情境之比較

問題情境的有無，意味著強調數學學習和生活情境的連結，或是著重數學概念與運算技巧的熟練，而呈現出教科書不同的特色與焦點。表 6 是三國代數情境問題與無情境問題的分布情形，其中臺灣代數情境問題的比例是三國最高的，占 68.32%，是芬蘭的五倍，新加坡的兩倍多，而且情境問題數量是無情境問題數量的兩倍多，由此可知臺灣代數教材設計的焦點，著重在使用有情境的問題來幫助學生理解代數的相關概念，並與學生的生活情境貼近，使其將所學得的代數概念運用於生活中。但反觀芬蘭和新加坡，代數問題中以無情境的問題居多，有情境的問題分別約占 14.62%和 28.24%，情境問題只有非情境問題的約 1/5 和 2/5，可見其代數教材的設計著重在數學概念和運算的本身，較少強調和生活情境的連結。雖然三國數學學習的目標都強調要將數學學習與學生的生活經驗做結合，從表 6 來看，可以發現只有臺灣康軒《數學》較符合其所設定的整體目標，芬蘭 WSOY 版和新加坡 MCE 版則在有情境問題的比例上稍有不足。

表 6 三國代數問題情境分布表

問題情境	臺灣	芬蘭	新加坡
有情境	442 (68.32%)	133 (14.62%)	196 (28.24%)
無情境	205 (31.68%)	777 (85.38%)	498 (71.76%)
有情境／無情境	2.18	0.17	0.39
總計	647	910	694

#### 四、三國代數教材的綜合比較

從三國代數教材所占的比重、版面的編排、問題的類型與呈現方式來看，臺灣的代數教材所占的比重最重，而且明顯地強調學習過程中融入情境的重要性，這從每個單元都提供情境扉頁、有情境的問題約占七成中可以看出，這樣的安排呼應臺灣在數學課程目標中強調連結與生活應用的重要性（國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域，2003），也和許多研究強調情境對數學學習重要性的主張（如 Anderson, 2003; Gutstein, 2003; Leonard & Dantley, 2005）。不過也因為強調和情境的結合，所以在表徵的形式上，代數問題以文字的表徵型態為主，這可能會使得學生在學習代數時，需要具備較好的語文閱讀理解能力，否則，文字理解的障礙，將影響學生對於代數概念的學習。而芬蘭和新加坡的代數教材，則明顯的以無情境且純粹的數學型態的表徵為主，尤其是芬蘭，學生在學習代數概念時，會著重在代數符號的運用與熟練，較少和生活情境的連結，這樣的呈現其實也符合兩國代數課程目標中較強調代數式的化簡與求解，較少強調情境的結合。此外，三國也有一些共同的特色，包括代數問題的類型以低認知問題為主，從 Stein 等人（2007）的觀點來看，會使得代數教學和學習的焦點，聚焦在程序的熟練，而忽略了意義的連結與理解，這是三國共同可能的問題；在表徵的形式上，三國都缺乏視覺和聯合型態的表徵，從多重表徵的觀點來看，可能會影響

三國學生對於代數概念的理解與學習，也減少了學生在不同表徵之間連結與理解的機會（Lesh, Post, & Behr, 1987; Zhu & Fan, 2006）。整體來看，臺灣和新加坡在版面編排、例題呈現、練習題所占比例上較為相似，而芬蘭與新加坡在問題的類型、表徵形式、和問題情境比例上較為接近，三國代數教材的綜合比較如表 7。

## 伍、結論與建議

### 一、結論

本研究以數學問題為單位，探討臺灣、芬蘭、新加坡三國國小代數教材的異同。結果發現，三國代數教材所占的比例均不高，以臺灣占 13.17% 的比例最高，芬蘭占 7.57% 的比例最低。而在版面編排上，臺灣和新加坡都先呈現完整的例題，提供引導和解題過程的說明，讓學生了解解題時的內在思考歷程與問題結構，再提供類似的問題供學生練習。芬蘭的版面編排較為簡單，例題的呈現也直接簡潔，同時提供大量的練習題供學生練習；在代數問題的類型和呈現方式上，三國的代數問題都以低認知的無連結程序型問題為主，但相較於芬蘭和新加坡，臺灣代數

表 7 三國代數教材的綜合比較表

分析類目		臺灣	芬蘭	新加坡
問題類型比例	最高	無連結程序型	無連結程序型	無連結程序型
	最低	作數學	作數學	作數學
問題表徵比例	最高	文字型態	數學型態	數學型態
	最低	視覺型態	聯合型態	視覺型態
問題情境比例	最高	有情境	無情境	無情境

教材提供較多高認知的具連結程序型問題，讓學生在代數學習過程中，有較多概念連結和理解的機會，芬蘭則非常強調代數運算規則和技巧的熟練，讓學生反覆練習大量的無連結程序型問題，而新加坡則介於兩國之間；在代數問題的呈現上，臺灣和新加坡例題所占的比例與呈現的方式相近，新加坡使用較多的例題來進行說明和示範，芬蘭則以練習題的呈現為主，練習題的數量和比例遠高於臺灣和新加坡，可見芬蘭代數教材較重視練習題的演練。在代數問題的表徵形式上，臺灣較重視文字型態的表徵，芬蘭和新加坡都以數學型態的表徵為主，三國都缺乏視覺型態和聯合型態表徵的問題，這意味著三國都以較抽象的文字和數學符號來呈現代數的教材內容，這可能使得學生在學習代數時有轉譯的困難，或聚焦在抽象符號的使用。最後從問題的情境來看，發現臺灣情境問題所占的比例最高，代數問題設計上使用較多的有情境問題來幫助學生理解未知數相關的概念，並讓學生的學習與生活情境貼近，而芬蘭和新加坡則是偏重在無情境的問題，是讓學生透過不斷的練習熟練計算的技巧或是觀察數列的規律。

## 二、建議

本節研究者將根據研究發現，提出幾點建議，供日後從事數學課程研究、編修或教師教學之參考。首先，在代數課程研究上，本研究是從代數問題的類型與呈現方式來進行分析，雖發現三國代數教材以低認知代數問題為主，但並未分析三國代數教材中代數概念的發展與轉變，未來研究者可進一步發展相關的類目（如參考臺灣代數課程對代數概念的分類），從不同的面向來比較三國代數教材的異同；其次，在未來代數課程的編修上，本研究發現臺灣缺乏設計高認知的作數學型問題，來供學生進行腦力激盪或給學生更高的挑戰，在表徵形式上也缺乏以視覺和聯合型態來呈現，這兩個部分都可以作為未來臺灣代數課程編修時的參考，以增加學生學習的廣度與深度；第三，對教師的教學上，由於臺灣

代數教材多以文字型態的方式呈現，因此教師在教學時，宜注意學生閱讀理解能力對其代數學習的影響，多提供機會和時間讓學生可以進行語意的理解，才能提升學生在代數的學習表現；最後，對想了解臺灣在代數課程演變的研究者，可以採用本研究所發展的分析類目，來分析臺灣不同時期代數課程的演變，相信可以更了解臺灣在數學課程改革的過程中，對於代數教材的比重與呈現方式的差異。

## 參考文獻

- 王文科 (2002)。教育研究法。臺北市：五南。
- 吳麗玲、楊德清 (2007)。臺灣、新加坡與美國五、六年級分數教材佈題呈現與知識屬性差異之研究。國立編譯館館刊，35 (1)，27-40。
- 林碧珍、蔡文煥 (2003)。四年級學生在國際教育成就調查試測的數學成就表現。科學教育月刊，258，2-20。
- 徐偉民 (2011a)。數學課程實施：一位國小資深教師的個案研究。科學教育學刊，19 (2)，101-122。
- 徐偉民 (2011b)。三位六年級教師數學課程實施之比較。教育研究集刊，57 (2)，85-120。
- 徐偉民 (2013)。國小教師數學教科書使用之初探。科學教育學刊，21 (1)，25-48。
- 徐偉民、徐于婷 (2009)。國小數學教科書代數教材之內容分析：臺灣與香港之比較。教育實踐與研究，22 (2)，67-94。
- 徐偉民、黃皇元 (2012)。臺灣與芬蘭國小數學教科書分數教材內容之分析。課程與教學季刊，15 (3)，75-108。
- 徐偉民、董修齊 (2012)。臺灣與芬蘭國小數學幾何教材內容之分析。當代教育研究季刊，20 (3)，39-86。
- 徐曉慧 (2010)。臺灣與中國小學數學教科書代數教材內容分析之比較研究。國立臺北教育大學數學教育研究所碩士論文，未出版，臺北市。
- 康軒教育網 (2007)。康軒數學教育理念。取自 <http://www.knsh.com.tw/>
- 康軒教育網 (2011)。關於康軒經營成果。取自 [http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go\\_Sub\\_Topic=08](http://www.knsh.com.tw/about/about.asp?go_Sub_Topic=08)
- 張琇涵 (2006)。臺灣與新加坡三角函數課程之教科書比較。國立中央大學數學研究所碩士論文，未出版，桃園縣。
- 國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域 (2003)。

- 陳之華 (2010)。成就每一個孩子：從芬蘭到臺北，陳之華的教育觀察筆記。臺北市：天下雜誌。
- 陳仁輝、楊德清 (2010)。臺灣、美國與新加坡七年級代數教材之比較研究。《科學教育學刊》，18 (1)，43-61。
- 楊瑞智 (主編) (2009)。國民小學數學 (第六版，第十二冊，六下)。臺北縣：康軒。
- 楊德清、施怡真、徐偉民、尤欣涵 (2011)。臺灣、美國和新加坡小一數學教材內容之比較研究。《課程與教學季刊》，14 (2)，103-134。
- 歐用生 (2000)。內容分析法。載於黃光雄、簡茂發 (主編)，《教育研究法》(頁 229-254)。臺北市：師大書苑。
- Anderson, C. W. (2003). How can schools support teaching for understanding in mathematics and science? In A. Gamoran, C. W. Anderson, P. A. Quiroz, W. G. Secada, T. Williams, & S. Ashmann. (Eds.) *Teaching in math and science: How schools and districts can support change* (pp. 1-21). New York, NY: Teachers College Press.
- Artzt, A., & Armour-Thomas, E. (2002). *Becoming a reflective mathematics teacher: A guide for observations and self-assessment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Barton, B. (2009). *The language of mathematics: Telling mathematical tales*. New York, NY: Springer.
- Bishop, A. J., & Forgasz, H. J. (2007). Issues in access and equity in mathematics education. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.1145-1167). Charlotte, NC: Information Age.
- Chambliss, M. J., & Calfee, R. C. (1998). *Textbooks for learning*. London, UK: Blackwell.
- Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H.-Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(2), 117-151.
- Curriculum Planning and Development Division. (2006). *Mathematics syllabus primary*. Singapore: Ministry of Education.
- D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 5(1), 44-48.
- Ensign, J. (2005). Helping teachers use students' home cultures in mathematics lessons: Developmental stages of becoming effective teachers of diverse students. In A. J. Rodriguez & R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 225-242). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Floden, R. E. (2002). The measurement of opportunity to learn. In A. C. Porter & A. Gamoran (Eds.), *Methodological advances in cross-national surveys of educational achievement* (pp. 229-266). Washington, DC: National Academy Press.
- Fong, H. K., Gan, K. S., & Ramakrishnan, C. (2010). *My Pals are Here! Maths 6A* (2nd Ed.). Singapore: Marshall Cavendish Education.
- Grouws, D., Smith, M., & Sztajn, P. (2004). The preparation and teaching practice of U.S. mathematics teachers: Grades 4 and 8. In P. Kloosterman & F. K.



- Lester (Eds.), *Results and interpretations of the 1990 through 2000 mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 221-269). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309-345). Singapore: World Scientific.
- Gutstein, E. (2003). Teaching and learning mathematics for social justice in an urban Latino school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 37-73.
- Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.
- Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: Macmillan.
- Leonard, J., & Dantley, S. J. (2005). Breaking through the ice: Dealing with issues of diversity in mathematics and science education course. In A. J. Rodriguez & R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 87-117). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.
- Lesh, R., & Lamon, S. J. (1992). *Assessment of authentic performance in school mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representation and translation among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problem of presentation in teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Laurence Erlbaum.
- Lloyd, G. M. (2008). Curriculum use while learning to teach: One student teacher's appropriation of mathematics curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(1), 63-94.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., & Foy, P. (2008). *TIMSS 2007 international mathematics report: Findings from IEA's trends in international mathematics and science study at the fourth and eighth grades*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.
- National Board of Education. (2004). *National core curriculum for basic education 2004*. Retrieved from [http://www.opb.fi/english/publications/2009/national\\_core\\_curricula](http://www.opb.fi/english/publications/2009/national_core_curricula)
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Research Council. (2004). Framework for evaluating curricular effectiveness. In J. Confrey & V. Stohl (Eds.), *On evaluating curricular effectiveness: Judging*

- the quality of K-12 mathematics evaluations* (pp. 36-64). Washington, DC: National Academies Press.
- Nicol, C., & Crespo, S. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 331-355.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2001). *Knowledge and skills for life: First results from PISA 2000*. Paris, France: Author.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2002). *Learning for tomorrow's world: First results from PISA 2003*. Paris, France: Author.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2003). *Education at the glance*. Paris, France: Author.
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2007). *PISA 2006 results: PISA 2006 science competencies for tomorrow's world executive summary*. Retrieved from [http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en\\_32252351\\_32235731\\_1\\_1\\_1\\_1\\_1,00.html](http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html)
- Organization for Economic Co-operation and Development. (2010). *PISA 2009 results: What students know and can do*. Retrieved from [http://www.oecd.org/document/61/0,3746,en\\_32252351\\_32235731\\_46567613\\_1\\_1\\_1\\_1,00.html](http://www.oecd.org/document/61/0,3746,en_32252351_32235731_46567613_1_1_1_1,00.html)
- Perkins, D. (1998). What is understanding? In M. S. Wiske (Ed.), *Teaching for understanding: Linking research with practice* (pp. 39-57). San Francisco, CA: Jossey-Bass.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. New York, NY: Routledge.
- Raymond, A., & Leinenbach, M. (2000). Collaborative action research on the learning and teaching of algebra: A story of one mathematics teacher's development. *Educational Studies in Mathematics*, 41(3), 283-307.
- Remillard, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, 75(2), 211-246.
- Saarelainen, P. (Ed.). (2010). *Laskutaito 6A in English*. Helsinki, Finland: WSOY.
- Silver, E. A., Mesa, V. M., Morris, K. A., Star, J. R., & Benken, B. M. (2009). Teaching mathematics for understanding: An analysis of lessons submitted by teachers seeking NBPTS certification. *American Educational Research Journal*, 46(2), 501-531.
- Smith, J. P., & Phillips, E. A. (2000). Listening to middle school students' algebra thinking. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(3), 156-161.
- Son, J., & Senk, S. L. (2010). How reform curricula in the USA and Korea present multiplication and division of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 117-142.
- Star, J. R., Herbel-Eisenmann, B. A., & Smith, J. P. (2000). Algebraic concepts: What's really new in new curricula? *Mathematics Teaching in the Middle School*, 5(7), 446-451.
- Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York, NY: Teachers College Press.

- Stein, M., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age.
- Törnroos, J. (2004). *Mathematics textbooks, opportunity to learn and achievement*. Paper presented at the meeting of the ICME-10 Discussion Group 14, Copenhagen, Denmark.
- Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.